解答例

STEP II 2006、第 1 問

純粋数学 • 周期的な漸化式

> **STEP II 2006、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q1

鍵となる考え方

各項が次の項を決めるので、$u_{p+1} = u_1 = 2$ となった時点で数列（sequence）は周期（period）p で繰り返す。したがって (i) の各問は、いくつかの項を k の関数として計算し、多項式方程式を一つ解くことに帰着する。周期 4 の方程式は周期 1 と周期 2 の答えを因数として含んでいなければならない（周期 1 や周期 2 の数列も $u_5 = u_1$ を満たすからである）。このことを前もって知っていれば、因数分解（factorisation）は容易になる。(ii) は一行で済む帰納法（induction）と、それに続くおなじみの「漸化式（recurrence）で $n \to \infty$ とする」議論である。

解答

小問 (i)

$f(u) = k - \dfrac{36}{u}$ とおくと、$u_{n+1} = f(u_n)$ である。$u_{p+1} = u_1$ ならば、f を繰り返し適用することで $u_{p+2} = u_2$、$u_{p+3} = u_3$、…が得られるので、すべての n について $u_{n+p} = u_n$ となる。逆に、周期 p であるためには当然 $u_{p+1} = u_1 = 2$ が必要である。よって、数列がちょうど周期 p をもつのは、$u_{p+1} = 2$ であり（すべての項が定義される、すなわち決して 0 にならないとして）、かつそれより小さい周期が成り立たないときである。

(a) 数列が定数であるための必要十分条件は $u_2 = 2$、すなわち $k - 18 = 2$ である。よって $k = 20$ である。

(b) $u_2 = k - 18$ であり、

$$u_3 = k - \frac{36}{k-18} \qquad (k \neq 18).$$

$u_3 = 2$ とおくと $(k-2)(k-18) = 36$ となるので $k^2 - 20k = 0$、よって $k = 0$ または $k = 20$ である。$k = 20$ は定数数列を与え、これは周期 2 ではなく周期 1 である。$k = 0$ のとき数列は 2, −18, 2, −18, ... となり、確かに周期 2 をもつ。よって $k = 0$ である。

(c) さらに二つの項が必要である。$k \neq 18$ のとき、

$$u_3 = \frac{k(k-18) - 36}{k - 18} = \frac{k^2 - 18k - 36}{k - 18},$$

であり、さらに $k^2 - 18k - 36 \neq 0$ ならば

$$u_4 = k - \frac{36(k-18)}{k^2 - 18k - 36} = \frac{k^3 - 18k^2 - 72k + 648}{k^2 - 18k - 36}.$$

条件 $u_5 = 2$ は $k - 36/u_4 = 2$、すなわち $u_4 = \dfrac{36}{k-2}$ を意味する（ここでは $k \neq 2$ が必要である。$k = 2$ とすると $36/u_4 = 0$ となり、これは不可能である）。分母を払うと、

$$(k-2)(k^3 - 18k^2 - 72k + 648) = 36(k^2 - 18k - 36).$$

展開してすべてを左辺に集めると、

$$k^4 - 20k^3 - 36k^2 + 792k - 1296 = 36k^2 - 648k - 1296,$$
$$k^4 - 20k^3 - 72k^2 + 1440k = 0.$$

考えてみよう このような四次式（quartic）を、多くの試行錯誤なしに因数分解するにはどうすればよいか。

始める前から二つの根がわかっている。周期 1 または 2 の数列はどれも $u_5 = u_1$ を満たすので、$k = 20$ と $k = 0$ は根でなければならない。k、続いて $k - 20$ をくくり出すと、

$$k^4 - 20k^3 - 72k^2 + 1440k = k(k-20)(k^2 - 72).$$

よって $k \in \{0, 20, 6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\}$ である。0 と 20 はそれぞれ周期 2 と周期 1 を与えるので、新しい値は $k = \pm 6\sqrt{2}$ である。

最後に、$k^2 = 72$ を用いて、$k = \pm 6\sqrt{2}$ のときすべての項が定義されることを確かめる。

- $u_2 = k - 18 \neq 0$ である。
- u_3 の分子は $k^2 - 18k - 36 = 36 - 18k$ であり、$k \neq 2$ より 0 でない。
- u_4 の分子は $k(k^2 - 72) - 18k^2 + 648 = -1296 + 648 = -648 \neq 0$ である。
- $u_5 = 2$ は構成から成り立ち、計算の途中で必要とした $k \neq 2$、$k \neq 18$ も満たされている。

$k \neq 0, 20$ であるから周期は 1 でも 2 でもない。$u_5 = u_1$ を満たし、最小周期（least period）が 1 でも 2 でもない数列は、ちょうど最小周期 4 をもつ（最小周期は 4 を割り切らなければならないからである）。よって、数列が周期 4 をもつのは $k = \pm 6\sqrt{2}$ のときである。

小問 (ii)

$k = 37$ とする。$u_n \geq 2$ を帰納法で証明する。$u_1 = 2$ より $n = 1$ のとき成り立つ。$u_n \geq 2$ ならば $u_n > 0$ であるから $0 < \dfrac{36}{u_n} \leq 18$ となり、したがって

$$u_{n+1} = 37 - \frac{36}{u_n} \geq 37 - 18 = 19 \geq 2.$$

よってすべての n について $u_n \geq 2$ であり、これが示すべきことであった。（実際には、$n \geq 2$ のすべての n について $u_n \geq 19$ である。）

> **考えてみよう** 極限（limit）の方程式は二つの根をもつ。正しいのはどちらで、それはなぜか。また、なぜ漸化式で $n \to \infty$ としてよいのか。

$u_n \to \ell$ であり、すべての u_n が $u_n \geq 2$ を満たすので、$\ell \geq 2$ である。特に $\ell \neq 0$ であるから $36/u_n \to 36/\ell$ となる。$u_{n+1} = 37 - 36/u_n$ の両辺で $n \to \infty$ とすると（左辺も ℓ に収束する）、

$$\ell = 37 - \frac{36}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 - 37\ell + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 1)(\ell - 36) = 0.$$

根 $\ell = 1$ は $\ell \geq 2$ により除外されるので、

$$\ell = 36.$$

検算

- $k = 6\sqrt{2} \approx 8.485$ のとき項は 2, -9.515, 12.269, 5.551, 2, ... であり、$k = -6\sqrt{2}$ のとき項は 2, -26.485, -7.126, -3.433, 2, ... である。どちらも四段階で元に戻る。
- 因数 $k^2 - 72$ にはすっきりした意味がある。写像（map）$u \mapsto (ku - 36)/u$ は行列（matrix）$\begin{pmatrix} k & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対応し、そのトレース（trace）は k、行列式（determinant）は 36 である。その固有値（eigenvalues）は $k = 12\cos\theta$ として $6e^{\pm i\theta}$ であり、四乗が単位行列（identity）のスカラー倍になるのは $\theta = \pi/4$ または $3\pi/4$ のときである。これにより $k = \pm 6\sqrt{2}$ が得られ、$\theta = \pi/2$ からは周期 2 の $k = 0$ が得られる。
- $k = 37$ のとき：$u_2 = 19$、$u_3 \approx 35.105$、$u_4 \approx 35.975$、$u_5 \approx 35.9993$ であり、項は明らかに 1 ではなく 36 に近づいている。

よくある間違い

- (b) で $k = 0, 20$ と答えたり、(c) で四つの根すべてを答えたりすること。問題は周期 2 と周期 4 を求めており、定数数列はその意味での周期 2 をもたない。
- $\ell = 36$ に加えて $\ell = 1$ も答えてしまうこと。(ii) の前半で示した評価 $u_n \geq 2$ は、これを除外するためにある。
- $\ell \neq 0$ に触れずに $n \to \infty$ とすること。これは $36/u_n \to 36/\ell$ のために必要である。

STEP のその先へ

写像 $u \mapsto (ku - 36)/u$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、このような写像の合成は 2×2 行列の積に対応する。周期性が、固有値の比が 1 の冪根（root of unity）になることに帰着するのはこのためである。$k = 37$ のとき、二つの不動点（fixed point）1 と 36 は異なる振る舞いをする。36 は近くの項を引き寄せ、1 は遠ざける。このことは $|f'(\ell)| = 36/\ell^2$ からわかる。これは不動点反復と数列の収束（convergence）の理論の出発点であり、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）で厳密に扱われている。Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）には、メビウス変換とその分類についての美しい章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。