解答例

STEP I 2006、第 9 問

力学 ・ 連結された質点

> **STEP I 2006、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q9

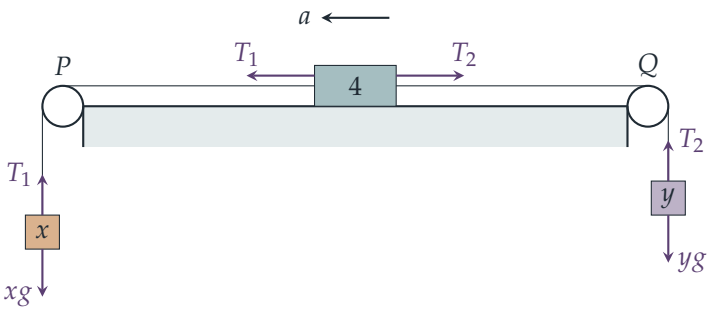
鍵となる考え方

運動は二つの段階に分かれ、各段階では加速度（acceleration）が一定である。両方の糸がつながっている間は、三つの物体からなる系全体が一体となって動き、その駆動力は吊るされた二つのおもりの重さの差である。糸が切られると、ブロックを引くのは軽い方の質点だけとなり、しかもその向きは運動と逆向きなので、ブロックは一様に減速する。糸を切った瞬間の速さが二つの段階を結びつけるものであり、束縛条件（constraint）$x + y = 6$ を用いればすべてを y で表すことができる。

解答

モデル化

ブロックと吊るされた二つのおもりを質点とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとし、台と滑車（pulley）はなめらかであるとする。$x > y$ であるから、ブロックは P の方へ動き、質量 x の質点は下降し、質量 y の質点は上昇する。P にかかる糸と Q にかかる糸の張力（tension）をそれぞれ T_1、T_2 とする。



第 1 段階：両方の糸がつながっているとき

共通の加速度を a_1 とする（ブロックは P の方へ、質点 x は下向き、質点 y は上向き）。各物体についてニュートンの第 2 法則（Newton's second law）を立てると

$$\begin{aligned} xg - T_1 &= xa_1, \\ T_1 - T_2 &= 4a_1, \\ T_2 - yg &= ya_1. \end{aligned}$$

となる。辺々を加えると張力が消去される：

$$(x-y)g = (x+y+4)a_1 = 10a_1, \qquad \text{よって} \qquad a_1 = \frac{(x-y)g}{10} = \frac{(6-2y)g}{10},$$

ここで $x = 6 - y$ を用いた。$y < x$ は $y < 3$ を意味するので、これは正である。

静止状態から一定の加速度で動き始めるので、ブロックは時間 t_1 で距離 d を進み、速さ V に達する。ここで

$$d = \tfrac{1}{2}a_1 t_1^2, \qquad V^2 = 2a_1 d.$$

である。したがって

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{20d}{(6-2y)g}} = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\frac{10}{\sqrt{6-2y}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}}.$$

第 2 段階：糸を切った後

このとき $T_1 = 0$ である。ブロックはなお速さ V で P の方へ動いており、質量 y の質点もなお速さ V で上昇している。ブロックに作用するのは Q にかかる糸だけであり、その糸はブロックを Q の方へ引き戻す。減速度（deceleration）を a_2 とすると

$$\begin{aligned} T_2 &= 4a_2 \quad (\text{ブロック}), \\ yg - T_2 &= ya_2 \quad (\text{質点 } y\text{、上昇しながら減速}), \end{aligned}$$

であるから

$$a_2 = \frac{yg}{4+y}.$$

考えてみよう 糸を切った後も Q にかかる糸がたるまないことは、どうしてわかるのか。

もし糸がたるんだとすると、質点は g で減速する一方、ブロックは速さを保つことになる。糸が張っているとすれば張力は $T_2 = 4a_2 = 4yg/(4+y) > 0$ となって矛盾がなく、共通の減速度 a_2 は g より小さい。したがって糸は実際に張ったままであり、ブロックと質点は止まるまで一体となって動く。

ブロックが静止するまでにさらにかかる時間は

$$\begin{aligned} t_2 = \frac{V}{a_2} &= \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}} \cdot \frac{4+y}{yg} \\ &= \sqrt{\frac{d}{5g}}\sqrt{6-2y}\left(1+\frac{4}{y}\right), \end{aligned}$$

である。ここで $\sqrt{(6-2y)gd/5}\,/\,g = \sqrt{d/(5g)}\sqrt{6-2y}$ および $(4+y)/y = 1+4/y$ と書き直した。

全体の時間

ブロックが初めて再び静止するのは第 2 段階の終わりであるから、全体の時間は

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{5g}}\left[\frac{10}{\sqrt{6-2y}} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\sqrt{6-2y}\right] = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\mathrm{f}(y),$$

となり、示すべき式が得られた。

f の停留値

物理的に意味のある範囲は $0 < y < 3$ である。$u = 6-2y$ とおくと $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$ であり

$$\mathrm{f}(y) = 10u^{-1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)u^{1/2}.$$

となる。第 2 項に積の微分法（product rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(y) &= 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-3/2}(-2) - \frac{4}{y^2}u^{1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\tfrac{1}{2}u^{-1/2}(-2) \\ &= \frac{10}{u^{3/2}} - \frac{4u^{1/2}}{y^2} - \frac{y+4}{y\,u^{1/2}}. \end{aligned}$$

$0 < y < 3$ で正である $y^2u^{3/2}$ を掛けると、条件 $f'(y) = 0$ は

$$10y^2 - 4u^2 - (y^2 + 4y)u = 0.$$

となる。$u = 6 - 2y$ を代入すると

$$\begin{aligned} 10y^2 - 4(36 - 24y + 4y^2) - (6y^2 - 2y^3 + 24y - 8y^2) &= 0 \\ 2y^3 - 4y^2 + 72y - 144 &= 0 \\ 2(y-2)(y^2+36) &= 0. \end{aligned}$$

$y^2 + 36 > 0$ であるから、解はただ一つ

$$y = 2,$$

であり、これは $0 < y < 3$ の範囲にある（このとき $x = 4$ である）。

$y \to 0^+$ のときも $y \to 3^-$ のときも $f(y) \to \infty$ であるから、このただ一つの停留点（stationary point）が最小値を与える。$f(2) = 10/\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ であるから、静止するまでの時間の最小値は $8\sqrt{2d/(5g)}$ である。

検算

- ランダムな $y \in (0,3)$ と d に対して運動を数値的に追跡したところ（時間刻み 2×10^{-6} s）、$\sqrt{d/(5g)}\, f(y)$ が有効数字 5 桁で再現された。たとえば $g = 9.8$ として $y = 1.671$、$d = 0.581$ の場合、どちらの方法でも 1.27096 s となる。
- f の数値微分は $(0,3)$ 上でちょうど一回だけ $y = 2$ で符号を変え、$f(2) = 11.3137\ldots = 8\sqrt{2}$ である。
- 極限の場合も筋が通っている。$y \to 3$ のとき質量はほぼつり合い、$a_1 \to 0$ となって第 1 段階に無限に長い時間がかかる。$y \to 0$ のときは糸を切った後にブロックを減速させるものがないので、第 2 段階に無限に長い時間がかかる。

よくある間違い

- 第 2 段階で質量 $4 + x + y$ を用いてしまう。糸が切られた後は、質量 x の質点はもはや系の一部ではない。
- 糸を切った後も質量 y の質点が速さ V で上昇し続けていることを忘れ、第 2 段階を静止状態から始まるものとして扱ってしまう。
- $\sqrt{6-2y}$ を微分するときに $du/dy = -2$ を落としてしまう。

STEP のその先へ

運動を速度の連続性によってつながれたいくつかの段階に分けるという考え方は、区分的に定義された力学（piecewise-defined dynamics）の基本であり、撃力（impulsive forces）や、力をオンにしたりオフにしたりする制御問題（control problems）にも再び現れる。どの y を選べば時間が最小になるかを問うことは、力学における最適化（optimisation）の最初の味見であり、これは変分法（calculus of variations）へと発展していく（最速降下線（brachistochrone）がその古典的な例である）。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、連結された物体と束縛力を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。