解答例

STEP I 2006、第 8 問

純粋数学 • 空間ベクトル

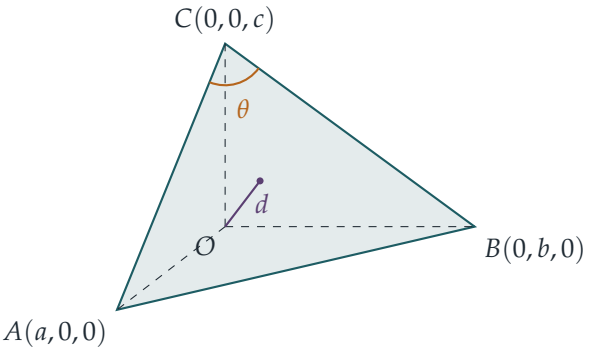
STEP I 2006、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q8

鍵となる考え方

四面体（tetrahedron）$OABC$ は頂点 O において互いに垂直な 3 本の辺をもつので、OAB を底面（base）とすれば体積（volume）は容易に求まる。同じ立体を ABC を底面として見ることもでき、そのとき高さはちょうど求めたい距離 d になる。体積を 2 通りに計算すれば、ABC の面積がわかっている限り、d についての方程式が得られる。その面積は C における角から求まり、その角は内積（scalar product）によって与えられる。



解答

小問 (i)

平面 $z = 0$ 上にある三角形 OAB を底面とする。OA と OB はそれぞれ x 軸、y 軸上にあるので、角 AOB は直角である。よって

$$\text{面積}OAB = \tfrac{1}{2}ab.$$

高さは C と平面 $z = 0$ との距離であり、OC は z 軸上にあってこの平面に垂直であるから、それは c である。したがって

$$V = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}ab \times c = \frac{abc}{6}.$$

小問 (ii)

角 ACB はベクトル（vector）$\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ のなす角である：

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}.$$

これらの内積は $0 + 0 + c^2 = c^2$ であり、大きさはそれぞれ $\sqrt{a^2 + c^2}$ と $\sqrt{b^2 + c^2}$ である。よって

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}},$$

となり、求める結果が得られる。

面積を求めるには $\sin\theta$ が必要である。$0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} &= \sqrt{\frac{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) - c^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}, \end{aligned}$$

となる。$(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)$ を展開すると c^4 の項が打ち消し合うからである。

> **考えてみよう** 今わかっている情報に合うのは、三角形の面積を求めるどの公式だろうか？

2 辺 CA、CB とそのなす角 θ がわかっているので、$\frac{1}{2}CA \cdot CB \sin\theta$ を用いる。厄介な平方根は打ち消し合う：

$$\text{面積}ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

うれしいことに、答えは a、b、c について対称であり、そうでなければならない。三角形 ABC にとって、どの頂点を C と呼んだかは関係ないからである。

距離 d

今度は ABC を同じ四面体の底面とみなす。その高さは、向かい合う頂点 O から平面 ABC までの垂直距離であり、それが d である。体積はどの面を底面とするかによらないので、小問 (i) と小問 (ii) から

$$\frac{abc}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \times d, \qquad \text{よって} \qquad d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

両辺を 2 乗して逆数をとると（すべて正である）、

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

となる。ここで分子の各項を $a^2b^2c^2$ で割った。これが求める結果である。

検算

- $a = b = c = 1$ とする。このとき ABC は 1 辺 $\sqrt{2}$ の正三角形で、面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり、$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ と一致する。平面は $x + y + z = 1$ で、O からの距離は $1/\sqrt{3}$ であり、確かに $1/d^2 = 3$ である。
- $a = 1$、$b = c = 2$ のとき、公式から体積 $\frac{2}{3}$、面積 $\sqrt{6} \approx 2.449$、$d = 2/\sqrt{6} \approx 0.8165$ が得られ、$1/d^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ となる。
- 数値的に、ランダムな 10 000 組の (a, b, c) について、体積（スカラー三重積（scalar triple product）による）、面積（外積（cross product）による）、d（垂線の足を直接求めることによる）はいずれも公式と 10^{-12} 以内で一致した。

よくある間違い

- $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{CB}$ を組み合わせて使うこと。向きを混在させると内積の符号が反転し、θ の補角（supplement）が得られてしまう。
- 底面を ABC としたときの高さは、O からその平面に下ろした垂線であって、どの辺の長さでもないことを忘れること。

STEP のその先へ

A、B、C を通る平面は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ であり、その法線ベクトル（normal）は $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ である。点と平面の距離の一般公式を使えば、d は 1 行で求まる。面積の結果は 3 次元版の三平方の定理（Pythagoras theorem）、すなわちド・グアの定理（de Gua's theorem）

である：ABC の面積の 2 乗は、O において直角をなす 3 つの面の面積の 2 乗の和に等しい。実際、$\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ はちょうどその和である。どちらの考え方も外積と行列式（determinant）から生まれるもので、これらは大学最初の線形代数（linear algebra）の講義の早い段階で学ぶ。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、それらに触れるのによい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。