解答例

STEP I 2006、第 7 問

純粋数学 • 絶対値記号を含む積分

> **STEP I 2006、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q7

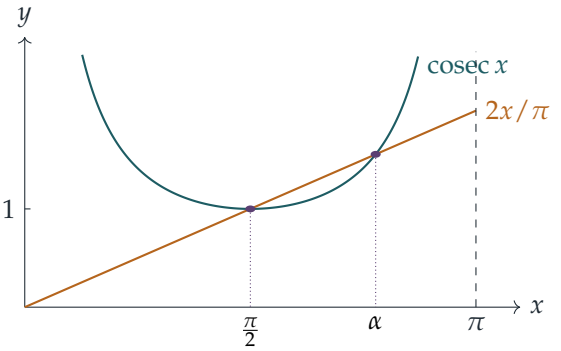
鍵となる考え方

$x\sin x = \pi/2$ を $\frac{\pi}{2}\sin x$（これは $(0,\pi)$ 上で正である）で割ると、$\operatorname{cosec} x = 2x/\pi$ となる。したがって根（root）は直線と U 字型の曲線との交点であり、直線は凸（convex）な曲線と高々 2 回しか交わらない。積分については、絶対値（modulus）を含む場合の要点はただ一つである。中身の式の符号が変わる点を見つけ、そこで積分区間を分割し、各部分を正しい符号で積分すればよい。

解答

小問 (i)：概形と根

$0 < x < \pi$ において、$\operatorname{cosec} x$ は両端で $+\infty$ に発散し、$x = \pi/2$ に関して対称で、そこで最小値 1 をとる。直線 $y = 2x/\pi$ は $(0,0)$ から $(\pi,2)$ まで伸び、cosec 曲線の底である $(\pi/2,1)$ を通る。



$(0,\pi)$ 上で $\sin x > 0$ であるから、

$$x\sin x = \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sin x} = \frac{2x}{\pi},$$

となり、根は図の交点の x 座標である。そのうち 1 つはすぐにわかる。$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ であるから、$x = \pi/2$ が根である。

根がちょうど 2 つであることを確かめるため、$h(x) = \operatorname{cosec} x - 2x/\pi$ とおく。すると

$$h''(x) = \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x) > 0 \quad \text{区間}(0,\pi),$$

であるから、h は狭義凸（strictly convex）であり、狭義凸関数の零点は高々 2 つである。（もし 3 つの零点 $a < b < c$ をもつとすると、b は a と c の真に間にあるのに、$h(b)$ は $(a,0)$ と $(c,0)$ を結ぶ弦の真に下ではなく、弦の上にあることになってしまう。）さて、$h'(\pi/2) = -\cot\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$ であるから、h は $\pi/2$ のすぐ右側で負となる。一方、$x \to \pi^-$ のとき $h(x) \to +\infty$ である。連続性（continuity）より、h は $\pi/2 < \alpha < \pi$ を満たす零点 α をもつ。よって根はちょうど 2 つ、すなわち $\pi/2$ と α であり、α の方が大きい。

小問 (i)：積分

図（および凸性による議論）から、cosec 曲線は 2 つの根の間では直線の下にあり、α より先では直線の上にある。$\operatorname{cosec} x \lessgtr 2x/\pi$ に正の量 $\frac{\pi}{2}\sin x$ を掛けると、これは次のことを意味する。

$$x\sin x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ 区間 } \left[\tfrac{\pi}{2},\alpha\right], \qquad x\sin x - \frac{\pi}{2} \leq 0 \text{ 区間}[\alpha,\pi].$$

考えてみよう 絶対値記号はどう処理すればよいだろうか。

符号が変わる α で積分を分割し、2 つ目の部分では式の符号を反転させたものを積分する。

$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x.$$

よって $x\sin x - \pi/2$ の原始関数（antiderivative）の 1 つは

$$F(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi x}{2},$$

であり、求める積分は

$$I = [F(x)]_{\pi/2}^{\alpha} - [F(x)]_{\alpha}^{\pi} = 2F(\alpha) - F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(\pi).$$

となる。3 つの値は

$$F(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha\pi}{2},$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - \frac{\pi^2}{4},$$
$$F(\pi) = 0 - \pi(-1) - \frac{\pi^2}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

である。したがって

$$I = 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha\pi - 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\sin\alpha + \frac{3\pi^2}{4} - \alpha\pi - \pi - 2\alpha\cos\alpha - 1,$$

となり、これが求める結果である。

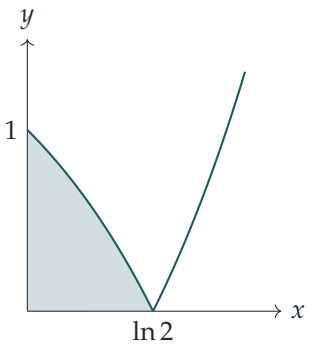
小問 (ii)

考えてみよう 2 つの絶対値記号のうち、ここで実際に効いているのはどちらだろうか。

x 軸の正の部分では $x \geq 0$ であるから $\mathrm{e}^x \geq 1$ となり、内側の絶対値は何の影響も及ぼさない。すなわち $|\mathrm{e}^x - 1| = \mathrm{e}^x - 1$ である。したがって曲線は

$$y = |\mathrm{e}^x - 2| \qquad (x \geq 0).$$

である。これは $0 \leq x \leq \ln 2$ では $2 - \mathrm{e}^x$ に等しく、$x = 0$ における $y = 1$ から $x = \ln 2$ における $y = 0$ まで減少する。また $x \geq \ln 2$ では $\mathrm{e}^x - 2$ に等しく、限りなく増加する。



よって曲線が x 軸に触れるのは $x = \ln 2$ のみであり、x 軸の正の部分、y 軸、曲線で囲まれる領域は $0 \leq x \leq \ln 2$ 上の網掛け部分だけである（$\ln 2$ より先では曲線は上昇し

て離れていき、領域は閉じない)。その面積は

$$\int_0^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$$

となり、題意が示された。

検算

二分法 (bisection) により $\alpha \approx 2.4433$ が得られ、このとき (i) の式の値は約 0.61343 となる。$[\pi/2, \pi]$ 上で $|x\sin x - \pi/2|$ に直接シンプソンの公式 (Simpson's rule) を適用しても、小数第 14 位まで同じ値が得られる。$(0, \pi)$ 上の格子探索により、$x\sin x - \pi/2$ の符号変化はちょうど 2 回、1.5708 付近と 2.4433 付近で見つかる。(ii) では $\ln 4 - 1 \approx 0.38629$ であり、これも数値積分の結果と一致する。(i) の符号に関する簡単な確認として、答えは正でなければならないが、実際に正である。

よくある間違い

- α で分割せずに $[\pi/2, \pi]$ 全体で $x\sin x - \pi/2$ をそのまま積分してしまう。これでは符号付き面積(ここでは負)が得られるだけで、絶対値の積分にはならない。
- 直線が cosec 曲線の最小点を通り、図が接しているように見えるために、$x = \pi/2$ の根を見落とす。実際には接していない。そこでの曲線の傾きは 0、直線の傾きは $2/\pi$ であるから、両者は交差している。
- (ii) で両方の絶対値記号を残したまま、場合分けを必要以上に増やしてしまう。まず $x \geq 0$ を用いて $\mathrm{e}^x - 1$ の符号を確定させるべきである。

STEP のその先へ

根 α は閉じた形で表せないが、それでも積分をそれを用いて厳密に計算することができた。これは解析学ではよくある状況であり、ある量が公式ではなく方程式によって定まるのである。狭義凸関数が直線と高々 2 回しか交わらないという事実は、凸性から導かれる数多くの見事な帰結の 1 つである。凸性はイェンセンの不等式 (Jensen's inequality) や最適化理論の多くの土台にもなっている。Bartle and Sherbert の *Introduction to Real Analysis*(実解析入門)では、連続性、中間値の定理、凸関数が丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。