解答例

STEP I 2006、第 6 問

純粋数学 • ペル方程式の変換

> **STEP I 2006、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q6

鍵となる考え方

各小問では、線形な座標変換（linear change of coordinates）によってある二次式が保たれるかどうかが問われている。素直な方法は、代入して展開し、a^2、ab、b^2 の係数を比較（compare coefficients）することである。その背後には、もっと見通しのよい描像がある。$x^2 - 2y^2$ は数 $x + y\sqrt{2}$ の「大きさ」であり、$3 + 2\sqrt{2}$（その大きさは $9 - 8 = 1$ である）を掛けてもその大きさは変わらない。このことがわかれば、(iii) の写像をどう作ればよいかがはっきりする。

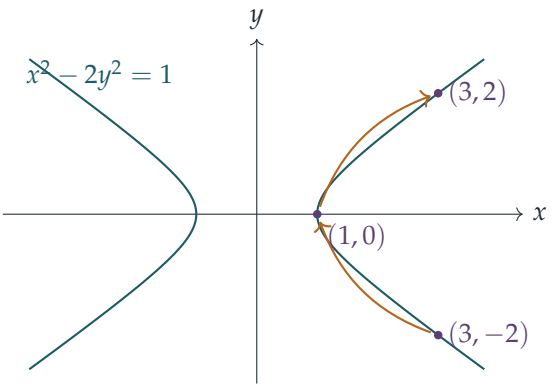
解答

小問 (i)

$a^2 - 2b^2 = 1$ と仮定する。このとき

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= a^2 - 2b^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

であるから、$(3a + 4b,\ 2a + 3b)$ は $x^2 - 2y^2 = 1$ 上にあり、示すべきことが示された。実は最初の 2 行は、すべての a と b について成り立つ恒等式（identity）である。すなわち、この写像は曲線上だけでなく、至るところで $x^2 - 2y^2$ を保つ。



この写像は、点を右側の枝に沿って滑らせていく：$(3,-2) \mapsto (1,0) \mapsto (3,2) \mapsto (17,12) \mapsto \cdots$。

小問 (ii)

$Ma^2 - Nb^2 = 1$ と仮定する。展開すると

$$M(5a+6b)^2 - N(4a+5b)^2 = (25M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-25N)b^2.$$

像の点が曲線上にあるのは、これが $1 = Ma^2 - Nb^2$ に等しいとき、かつそのときに限る。$Ma^2 - Nb^2$ を引くと、条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= (24M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-24N)b^2 \\ &= 4(3M-2N)(2a^2+5ab+3b^2) \\ &= 4(3M-2N)(2a+3b)(a+b). \end{aligned}$$

考えてみよう 本当に $3M = 2N$ が必要なのだろうか。代わりにほかの因数が 0 になることはないのだろうか。

この条件は、曲線上の**すべての**点で成り立たなければならない。$M, N > 0$ のとき、曲線 $Mx^2 - Ny^2 = 1$ は無限個の点をもつ双曲線（hyperbola）である。直線 $2x + 3y = 0$ と $x + y = 0$ はそれぞれこの曲線と高々 2 点でしか交わらないので、曲線上のほとんどの点で $(2a+3b)(a+b) \neq 0$ となる。したがって $3M - 2N = 0$ が必要である。逆に、$3M = 2N$ ならば条件はすべての点で成り立つ。

よって $3M = 2N$ である。このとき $2 \mid 3M$ であるから、M は偶数である。最小の選び方は $M = 2$ であり、このとき $N = 3$ となる。最後に確認すると、

$$2(5a+6b)^2 - 3(4a+5b)^2 = (50-48)a^2 + (120-120)ab + (72-75)b^2 = 2a^2 - 3b^2.$$

求める最小の正の整数は $M = 2$、$N = 3$ である。

小問 (iii)

次を満たす正の整数を求めたい。

$$(Pa+Qb)^2-3(Ra+Sb)^2=a^2-3b^2 \quad \text{任意の} a,b,$$

これが成り立てば、曲線上のすべての点の像が確かに曲線上にある。係数を比較すると

$$P^2-3R^2=1, \qquad PQ=3RS, \qquad Q^2-3S^2=-3.$$

第 1 式は、$x^2-3y^2=1$ 上の正の整数点 (P,R) を求めよということである。最小のものは $(2,1)$ なので、$P=2$、$R=1$ を試す。すると第 2 式から $Q=\frac{3}{2}S$ が得られ、第 3 式は $\frac{9}{4}S^2-3S^2=-3$、すなわち $S^2=4$ となる。よって $S=2$、$Q=3$ である：

$$P=2, \quad Q=3, \quad R=1, \quad S=2.$$

確認：$(2a+3b)^2-3(a+2b)^2=4a^2+12ab+9b^2-3a^2-12ab-12b^2=a^2-3b^2=1$。よって $(2a+3b,\ a+2b)$ は $x^2-3y^2=1$ 上にある。

考えてみよう このような写像はどこから来るのだろうか。

$(a+b\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2a+3b)+(a+2b)\sqrt{3}$ と書いてみる。$x+y\sqrt{3}$ のノルム（norm）x^2-3y^2 は乗法的（multiplicative）であり、$2+\sqrt{3}$ のノルムは $4-3=1$ であるから、これを掛けてもノルムは保たれる。小問 (i) も $3+2\sqrt{2}$ を用いて同じように説明できる。(ii) については $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})=(5a+6b)\sqrt{2}+(4a+5b)\sqrt{3}$ であり、これが (ii) に二次形式 $2x^2-3y^2$ が現れる理由である。(iii) にはほかの答えもある。$(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$ を掛けると $(7a+12b,\ 4a+7b)$ が得られる。

検算

- $x^2-3y^2=1$ 上の $(1,0)$ から始める。(iii) の写像を繰り返すと $(2,1)$、$(7,4)$、$(26,15)$、$(97,56)$ が得られ、いずれも $x^2-3y^2=1$ を満たす（例えば $26^2-3\cdot15^2=676-675=1$）。
- (ii) について、$(1/\sqrt{2},0)$ は $2x^2-3y^2=1$ 上にあり、$(5/\sqrt{2},\ 4/\sqrt{2})$ に写される。このとき $2\cdot\frac{25}{2}-3\cdot\frac{16}{2}=25-24=1$。
- $1\le M,N<30$ の範囲で、各双曲線上の実際の点を調べる総当たり探索を行うと、条件を満たす最小の組が $(2,3)$ であることが確認できる。

よくある間違い

- (ii) で、ab の係数だけを 0 とおき、そのとき a^2 と b^2 の係数がそれぞれ M と $-N$ になることを確かめない。この問題ではそうなるが、それは示さなければならない。
- 問題では曲線上の点しか与えられていないのに、根拠なしに「恒等式がすべての a, b について成り立たなければならない」と述べる。上の因数分解のような、ほかの因数が 0 になる可能性を排除する議論が必要である。

STEP のその先へ

これらはペル方程式（Pell equations）$x^2 - dy^2 = 1$ である。その整数解は、環（ring）$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ における基本単数（fundamental unit）$x_1 + y_1\sqrt{d}$ のべきによって生成され、ここで扱った写像はそのような単数を掛ける操作である。行列の言葉でいえば、各写像は二次形式（quadratic form）を保つ 2×2 の整数行列であり、「整数直交群（integral orthogonal group）」の元である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）には、連分数（continued fractions）を用いたペル方程式の、1 章分にわたるすばらしい解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。