解答例

STEP I 2006、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

STEP I 2006、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/06-s1-q5

鍵となる考え方

どちらの被積分関数（integrand）にも扱いにくい平方根が含まれている。一次式の平方根を消すもっとも見通しのよい方法は、根号全体を新しい変数とおくことである。根号が消えれば残るのは有理関数（rational function）であり、有理関数は部分分数分解（partial fractions）によって必ず積分できる。小問 (ii) では、まず指数関数を取り除いて平方根の中身を一次式にしておくのがよく、そうすれば同じ手法が使える。

解答

小問 (i)

$x > 4$ より $2x+1 > 9$ であるから、$u = \sqrt{2x+1} > 3$ とおくことができる。$u^2 = 2x+1$ より

$$2u\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u,$$

であり、

$$x - 4 = \frac{u^2-1}{2} - 4 = \frac{u^2-9}{2}.$$

これらを代入すると

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{\frac{1}{2}(u^2-9)\,u}\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u.$$

$\mathrm{d}x$ から出てくる因数 u が平方根をちょうど打ち消している。これこそがこの置換（substitution）がうまくいく理由である。ここで $u^2-9 = (u-3)(u+3)$ であり、

$$\frac{6}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3},$$

が成り立つ。これは通分し直せば確かめられる。分子は $(u+3)-(u-3)=6$ となる。したがって

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = \ln(u-3)-\ln(u+3)+K = \ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)+K,$$

である。ここで $u>3$ より $u-3$ と $u+3$ はともに正なので、絶対値記号（modulus signs）は必要ない。$u=\sqrt{2x+1}$ を戻すと

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x+1}+3}\right)+K,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

求める積分を I とする。小問 (i) にならって、平方根に名前をつけるのが自然な置換である。

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, \qquad w^2=\mathrm{e}^x+1.$$

すると $2w\,\mathrm{d}w=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ であるから、$\mathrm{d}x=\dfrac{2w}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}w=\dfrac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w$ となる。積分区間の端は次のように変わる。

$$x=\ln 3:\ w=\sqrt{3+1}=2, \qquad x=\ln 8:\ w=\sqrt{8+1}=3.$$

したがって

$$I=\int_2^3 \frac{2}{(w^2-1)\,w}\cdot\frac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w=\int_2^3 \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w.$$

考えてみよう 長い計算をせずに $\dfrac{4}{(w^2-1)^2}$ を部分分数に分解するにはどうすればよいか。

簡単な分解 $\dfrac{2}{w^2-1}=\dfrac{1}{w-1}-\dfrac{1}{w+1}$ から出発し、これを2乗する。

$$\begin{aligned}\frac{4}{(w^2-1)^2} &= \frac{1}{(w-1)^2}-\frac{2}{(w-1)(w+1)}+\frac{1}{(w+1)^2}\\ &= \frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1},\end{aligned}$$

ここで、中央の項にもう一度同じ簡単な分解を用いた。これで各項はすぐに積分できる。

$$\int \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}-\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right)+C,$$

積分区間では $w \geq 2$ なので、絶対値記号は必要ない。値を計算すると

$$\begin{aligned} \text{上端} w=3: &\quad -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\ln\tfrac{2}{4} = -\tfrac{3}{4}+\ln 2, \\ \text{下端} w=2: &\quad -1-\tfrac{1}{3}-\ln\tfrac{1}{3} = -\tfrac{4}{3}+\ln 3. \end{aligned}$$

よって

$$I = \left(-\tfrac{3}{4}+\ln 2\right) - \left(-\tfrac{4}{3}+\ln 3\right) = \frac{7}{12}+\ln\frac{2}{3},$$

となり、これが示すべき結果である。

2 段階に分けて、まず $v = \mathrm{e}^x$ とおき（$\int_3^8 \frac{2}{v^2\sqrt{v+1}}\,\mathrm{d}v$ が得られる）、次に $w^2 = v+1$ とおいてもよい。上の一度の置換は、この 2 つを同時に行っているのである。

検算

- (i) の答えを微分する。$u = \sqrt{2x+1}$ とすると $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}$ であり、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\frac{u-3}{u+3} = \frac{6}{u^2-9}$ であるから、導関数は $\frac{6}{u(u^2-9)} = \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}$ となる。
- 数値的には $\frac{7}{12}+\ln\frac{2}{3} \approx 0.58333 - 0.40547 = 0.17787$ であり、もとの被積分関数に $[\ln 3, \ln 8]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると 0.177868 となって、有効数字 6 桁まで一致する。
- 符号と大きさの妥当性の確認：(ii) の被積分関数は正で、長さ $\ln\frac{8}{3} \approx 0.98$ の区間において約 0.33 から約 0.08 まで減少する。したがって 0.2 を少し下回る答えはまさに予想どおりである。

よくある間違い

- (ii) で変数を変えるときに積分区間の端を変え忘れる、あるいは w の式に x の端の値を代入してしまう。
- $\frac{4}{(w^2-1)^2}$ を $\frac{A}{(w-1)^2}+\frac{B}{(w+1)^2}$ の形だけで表そうとする。重複因数がある場合には、一次の項 $\frac{1}{w-1}$ と $\frac{1}{w+1}$ も必要である。
- (i) で $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$ ではなく $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ としてしまい、平方根が残ってしまう。

STEP のその先へ

どちらの小問も対数と有理式の項で終わるのは、一般的な定理によるものである。すべての有理関数は、部分分数分解を通じて、有理関数・対数・逆正接（inverse tangent）から組み立てられる初等的な原始関数（antiderivative）をもつ。さらに、x と $\sqrt{ax+b}$

の有理式である被積分関数は、置換 $u^2 = ax + b$ によって有理関数になる。これを二次式の平方根に拡張するとオイラー（Euler）の置換（Euler's substitutions）に行き着き、どのような積分が初等的には**計算できない**のかを問うと、リウヴィル（Liouville）の有限項による積分の理論へとつながる。積分とそれがなぜうまくいくのかについての丁寧な解説としては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。