解答例

STEP I 2006、第 4 問

純粋数学 ・ 正多角形の面積

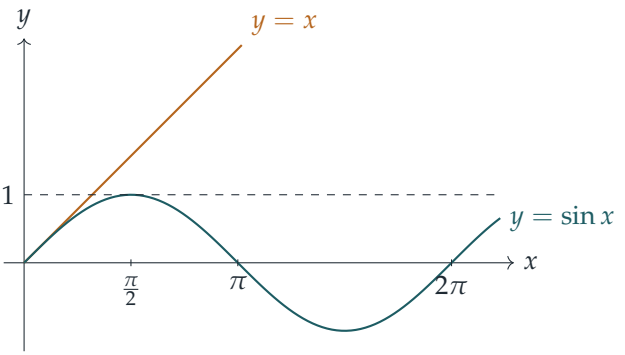
> **STEP I 2006、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q4

鍵となる考え方

直線 $y = x$ は原点における $y = \sin x$ の接線（tangent）であり、正弦曲線はその下側へと曲がって離れていく。この一枚の図から、不等式と近似（approximation）の両方が得られる。多角形については、中心で集まる n 個の合同（congruent）な二等辺三角形（isosceles triangle）に分割する。するとすべての量が半角 π/n の三角関数で表され、不等式 $\sin x < x$ こそが導関数（derivative）の符号を決めるものであることがわかる。

解答

二つのグラフ



$x = 0$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x = 1$ であるから、二つの曲線はどちらも原点を通り、そこでの傾きは 1 である。したがって $y = x$ は O における正弦曲線の接線である。

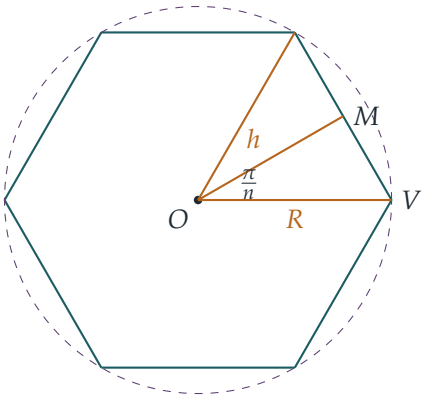
(i) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ では正弦曲線は上に凸（concave）である（$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$）

から、O における接線の下側にあり、$\sin x < x$ が成り立つ。（同じことであるが、$g(x) = x - \sin x$ とおくと $g(0) = 0$ であり、$0 < x < 2\pi$ で $g'(x) = 1 - \cos x > 0$ であるから、g はそこで狭義単調増加（strictly increasing）である。）$x > \frac{\pi}{2}$ では $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x$ である。よって、すべての $x > 0$ に対して $x > \sin x$ である。

(ii) この直線は O における接線であるから、原点の近くでは二つのグラフはほとんど区別がつかない。小さな x に対しては高さ $\sin x$ が高さ x にきわめて近いので、$\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$ である。（より精密に述べると、$x > 0$ に対して $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ であるから、$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$ が成り立つ。）

多角形の面積

多角形の中心 O と各頂点（vertex）を結ぶ。これにより多角形は n 個の合同な二等辺三角形に分割され、それぞれの底辺は一辺 $s = P/n$ に等しく、O における頂角は $2\pi/n$ である。O から辺の中点（midpoint）M へ垂線（perpendicular）を下ろすと、この垂線は頂角を二等分する。



直角三角形 OMV（V は頂点）において、O における角は π/n であり、$MV = \frac{1}{2}s$ である。よって、中心から辺までの距離 $h = OM$ は

$$h = \frac{s/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{P}{2n\tan(\pi/n)}.$$

である。n 個の三角形はそれぞれ面積 $\frac{1}{2}sh$ をもつから、多角形の面積は

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{n} \cdot \frac{P}{2n\tan(\pi/n)} = \frac{P^2}{4n\tan(\pi/n)},$$

となり、示すべき式が得られた。

面積は n とともに増加する

P を固定し、$f(n) = n\tan\dfrac{\pi}{n}$ として $A = \dfrac{P^2}{4f(n)}$ と書く。$n \geq 3$ では $f(n) > 0$ であるから、A が増加するのは f が減少するときであり、そのときに限る。積の微分法則（product rule）と合成関数の微分法則（chain rule）により、

$$f'(n) = \tan\frac{\pi}{n} + n\sec^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta, \qquad \text{ただし}\theta = \frac{\pi}{n}.$$

考えてみよう $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$ の符号はどのように決めればよいだろうか？

正の因数 $\sec^2\theta$ をくくり出し、$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ を用いると、

$$f'(n) = \sec^2\theta\,(\sin\theta\cos\theta - \theta) = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\,(\sin 2\theta - 2\theta).$$

となる。$n \geq 3$ では $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ であるから $2\theta > 0$ であり、小問 (i) より $\sin 2\theta < 2\theta$ である。したがって $f'(n) < 0$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} = -\frac{P^2 f'(n)}{4f(n)^2} > 0.$$

である。よって、周の長さを固定すると、n が増加するにつれて面積は増加する。

外接円との比較

多角形を含む最小の円は外接円（circumcircle）、すなわち O を中心としすべての頂点を通る円である。これより小さい円では含みきれないことを確かめるため、頂点を $V_1, \ldots, V_n$ とし、$\overrightarrow{OV_k} = \mathbf{v}_k$、$|\mathbf{v}_k| = R$ とおく。対称性より $\sum \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ であるから、$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ を満たす任意の点 C に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{v}_k - \mathbf{c}|^2 = R^2 - \frac{2}{n}\,\mathbf{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k + |\mathbf{c}|^2 = R^2 + |\mathbf{c}|^2 \geq R^2.$$

が成り立つ。よって、C からの距離が R 以上である頂点が存在し、C を中心とし多角形を含む円の半径は R 以上である。外接円の半径（circumradius）は $R = OV$ であり、同じ直角三角形から

$$\tfrac{1}{2}s = R\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{P}{2n\sin\theta}.$$

を得る。したがって面積の比は

$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{P^2}{4n\tan\theta}\cdot\frac{4n^2\sin^2\theta}{\pi P^2} = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta},$$

である。ここで $n/\pi = 1/\theta$ を用いた。n が大きいとき $2\theta = 2\pi/n$ は小さいので、小問 (ii) によりこの比はほぼ 1 である。

検算

正方形（$n = 4$、$\theta = \pi/4$）の場合、公式は $A = P^2/16$ を与える。各辺は $P/4$ であるから、これは正しい。面積の比は $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.637$ であり、単位円に内接する一辺 $\sqrt{2}$ の正方形と一致する。正六角形の場合、比は $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$ である。面積の公式は $n = 3, \ldots, 39$ について靴ひも公式（shoelace formula）と照合し、$f'(n) < 0$ は数値微分と照合した。また、比は $n = 100$ で 0.99934、$n = 1000$ で 0.9999934 となった。

よくある間違い

- 直角三角形において、半角 π/n ではなく頂角全体 $2\pi/n$ を用いてしまう。
- $\tan(\pi/n)$ を微分するときに、合成関数の微分による因数 $-\pi/n^2$ を忘れる。
- 「$\tan\theta \approx \theta$ だから」という理由で $\tan\theta < \theta\sec^2\theta$ と主張する。近似では符号は決まらない。符号を決めるのは厳密な不等式 $\sin 2\theta < 2\theta$ である。

STEP のその先へ

極限（limit）$\sin x/x \to 1$ は、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ に等しくなることを保証する事実であり、大学初年度の解析学（analysis）の講義では、図からではなく sin の定義からこれを厳密に証明する。単調性（monotonicity）の結果は、等周不等式（isoperimetric inequality）を離散的に垣間見せるものである。等周不等式とは、与えられた長さのすべての閉曲線のうちで円が最大の面積を囲むという主張であり、多角形の面積は円の値 $P^2/(4\pi)$ に向かって増加していく。極限と導関数の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。