解答例

STEP I 2006、第 3 問

純粋数学 • 多項式の根

> **STEP I 2006、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q3

鍵となる考え方

式ではなくグラフで考える。軸より下から始まり、最後には軸より上に出なければならない曲線は、必ず軸と交わる。また、$x = 0$ での値（定数項）を見れば、原点において曲線が軸のどちら側にあるかがわかる。3 次関数（cubic）の場合は、極値をとる点（turning points）が決め手になる。曲線が軸と 3 回交わるのは、極大値（local maximum）が軸より上にあり、かつ極小値（local minimum）が軸より下にあるときであり、またそのときに限る。

解答

小問 (i)

$f(x) = x^2 + bx + c$ とおく。このグラフは下に凸の放物線（parabola）であるから、$x \to \pm\infty$ のとき $f(x) \to +\infty$ である。$c < 0$ ならば $f(0) = c < 0$ であり、曲線は $x = 0$ において軸より下にある。

f は連続（continuous）であり、絶対値の大きい負の x に対しては正、0 においては負であるから、$(-\infty, 0)$ のどこかで軸と交わる。同様に、$(0, \infty)$ でもう一度軸と交わる。これら 2 つの根は 0 の両側にあるので、互いに異なる。2 次方程式の根は高々 2 個であるから、この方程式はちょうど 2 つの相異なる実数解をもち、一方は負、他方は正である。したがって、$c < 0$ は**十分条件**（sufficient condition）である。

しかし、これは**必要条件ではない**（not necessary）。たとえば、$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ は相異なる実数解 1 と 2 をもつが、$c = 2 > 0$ である。（必要十分条件は $b^2 > 4c$ である。$c < 0$ のときは $b^2 \geq 0 > 4c$ となるから、この条件は自動的に成り立つ。）

小問 (ii)

この方程式が相異なる2つの正の解をもつための必要十分条件は

$$b^2 > 4c, \qquad b < 0, \qquad c > 0.$$

であることを示す。

必要性。 根を $\alpha \neq \beta$、$\alpha, \beta > 0$ とする。このとき $x^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)$ であるから、

$$c = \alpha\beta > 0, \qquad b = -(\alpha + \beta) < 0, \qquad b^2 - 4c = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 > 0.$$

十分性。 $b^2 > 4c$ ならば、根 α, β は相異なる実数である。その積は $c > 0$ であるから、両者は同符号である。その和は $-b > 0$ であるから、その共通の符号は正である。

考えてみよう なぜ $b < 0$ と $c > 0$ だけでは不十分なのか。

$x^2 - x + 1$ を考える。ここでは $b = -1 < 0$、$c = 1 > 0$ であるが、$b^2 - 4c = -3 < 0$ であるから、実数解はまったく存在しない。グラフで言えば、$c > 0$ は曲線が $x = 0$ で軸より上にあることを意味し、$b < 0$ は頂点（vertex）が $x = -\frac{b}{2} > 0$ にあることを意味する。さらに、頂点が軸より下にあることも必要である。頂点の高さは $c - \frac{b^2}{4}$ であり、これが負になるのは $b^2 > 4c$ のときであり、またそのときに限る。3つの条件はいずれも欠かせない。

小問 (iii)

$g(x) = x^3 + px + q$ とおくと、$g'(x) = 3x^2 + p$ である。実数係数の3次方程式は重複度（multiplicity）を込めて3つの根をもち、実数でない根は互いに共役な複素数（complex conjugate）の組として現れる。また、どちらの場合も $g(0) = q < 0$ であることに注意する。

$p > 0$、$q < 0$ の場合。 このとき、すべての x に対して $g'(x) = 3x^2 + p > 0$ であるから、g は狭義単調増加であり、実数解をちょうど1つもつ。$g(0) = q < 0$ であり g は増加するから、その根は正である。残りの2つの根は、実数でない互いに共役な複素数の組である。

したがって、正の単根（simple root）である実数解が1つと、実数でない互いに共役な複素数解が2つある。

$p < 0$、$q < 0$ の場合。 $a > 0$ として $p = -3a^2$、すなわち $a = \sqrt{-p/3}$ とおく。このとき $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$ であるから、g は $(-\infty, -a]$ で増加、$[-a, a]$ で減少、$[a, \infty)$ で増

加する。$x=-a$ で極大、$x=a$ で極小となり、

$$g(-a)=-a^3+3a^3+q=2a^3+q, \qquad g(a)=a^3-3a^3+q=q-2a^3.$$

である。$q<0$ であるから、極小値 $g(a)$ は負である。$[0,a]$ において g は $g(0)=q<0$ から減少するので、ここに根はない。$[a,\infty)$ において g は $g(a)<0$ から $+\infty$ まで増加するので、a より大きい根をちょうど 1 つもち、それは正である。他の実数解があるとすれば $(-\infty,-a]$ または $(-a,0)$ にあるから負であり、そのような根が存在するかどうかは極大値 $g(-a)$ の符号だけで決まる。

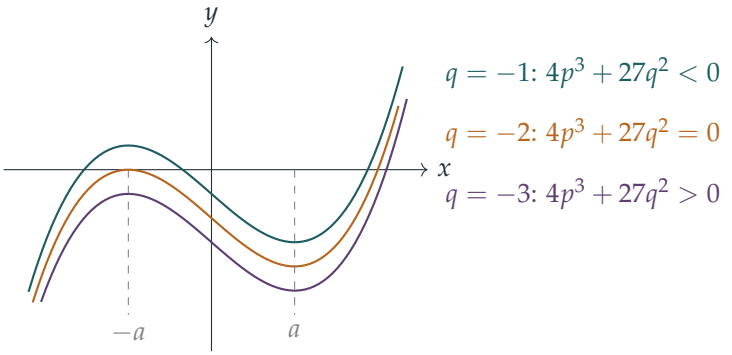
考えてみよう $g(-a)$ の符号は $4p^3+27q^2$ とどのように結びつくか。

2 つの極値を掛け合わせると、

$$g(-a)\,g(a)=(q+2a^3)(q-2a^3)=q^2-4a^6=q^2-4\left(-\frac{p}{3}\right)^3=\frac{4p^3+27q^2}{27}.$$

$g(a)<0$ であるから、$g(-a)$ の符号は $4p^3+27q^2$ の符号と**逆**である。次の 3 つの場合がある。

- $4p^3+27q^2>0$ のとき。$g(-a)<0$ であるから、$(-\infty,a]$ 全体で $g<0$ である（負の値 $g(-a)$ まで増加し、その後減少する）。実数解は正のものだけである。先ほどと同様に、正の実数解が 1 つと、実数でない互いに共役な複素数解が 2 つある。
- $4p^3+27q^2=0$ のとき。$g(-a)=0$ かつ $g'(-a)=0$ であるから、$x=-a$ は重解（repeated root）である。根の和は 0 である（x^2 の項がない）から、3 つ目の根は $2a$ である。根は $-a$、$-a$、$2a$ であり、負の 2 重解と正の単根で、すべて実数である。
- $4p^3+27q^2<0$ のとき。$g(-a)>0$ である。$x\to-\infty$ のとき $g(x)\to-\infty$ であるから、$(-\infty,-a)$ に根がある。$g(-a)>0>g(0)$ であるから、$(-a,0)$ にもう 1 つ根がある。a より大きい根と合わせて、相異なる 3 つの実数解が得られる。2 つは負、1 つは正である。



この図は、$q = -1$、-2、-3 に対する $y = x^3 - 3x + q$（すなわち $p = -3$、$a = 1$）を示している。極大値が軸を越えて上がると、1 つだった実数解が 3 つになる。

$q < 0$ のどの場合でも、正の根はちょうど 1 つである。これは根の積が $-q > 0$ であることと整合する。

検算

- $p = -3$、$q = -1$ のとき $4p^3 + 27q^2 = -108 + 27 = -81 < 0$ であり、数値的には根はおよそ -1.532、-0.347、1.879 である。予想どおり、2 つが負、1 つが正である。
- $p = -3$、$q = -2$ のとき、$4p^3 + 27q^2 = 0$ であり $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$ となるから、根は $-1, -1, 2$ である。
- 各場合について数千個の無作為な (p, q) に数値的な求根法を適用し、また無作為な (b, c) を (ii) の条件と照合したところ、上記の主張はすべて確認された。

よくある間違い

- (ii) で $b < 0$ と $c > 0$（これは根が実数で**あるならば**正であることを保証する）だけを挙げ、$b^2 > 4c$ を忘れる。
- (ii) で必要性だけ、あるいは十分性だけを証明する。「必要十分」には両方向が必要である。
- (iii) で、重解をもつ境界の場合 $4p^3 + 27q^2 = 0$ を忘れる。

STEP のその先へ

量 $-(4p^3 + 27q^2)$ は 3 次式 $x^3 + px + q$ の**判別式**（discriminant）であり、$b^2 - 4ac$ のまさに類似物である。これは根どうしの差の 2 乗の積に等しいので、重解をもつときに限り 0 となり、3 つの根がすべて相異なる実数であるときに限り正となる。判別式や、根と係数の関係は、ガロア理論（Galois theory）や、どの方程式が冪根（radicals）によって解けるかという問題へとつながっていく。手始めには Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。