解答例

STEP I 2006、第 2 問

純粋数学 ・ 面積と最適化

> **STEP I 2006、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q2

鍵となる考え方

つなぎとめる点の位置を、ひとつの角からの距離 x という一つの数で定め、ロープが納屋に巻きつく様子を追っていく。すると草を食べられる領域は、半円 1 つと四分円 4 つに分かれ、それらの半径はいずれも x の簡単な一次関数になる。したがって A は閉区間上の x の二次関数であり、問題のどちらの部分も、その最大値と最小値を求めることに帰着する。

解答

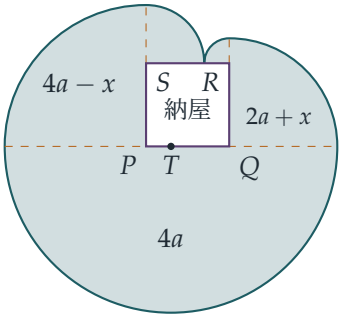
設定

納屋を $PQRS$ とし、ヤギは辺 PQ 上の点 T につながれているとする。ここで $0 \leq x \leq 2a$ として $PT = x$、$TQ = 2a - x$ である。対称性より、ヤギがどの辺にいるかは問題にならない。

ヤギがある点に届くのは、T からその点まで納屋を避けて進む最短経路の長さが $4a$ 以下であるときである。ロープを張ったとき、その経路は納屋の角で曲がるところを除いて直線である。T から納屋の周りを回っていくと、次のようになる。

- **PQ の前方**。直線 PQ に関して納屋と反対側にある点はすべて T から直接見通せるので、ヤギは半径 $4a$ の半円の草を食べられる。
- **PS と QR の横**。ロープが P で曲がると、残りの長さは $4a - x$ であり、辺 PS に沿って P を中心とする四分円を描く。同様に、Q では $4a - (2a - x) = 2a + x$ が残り、QR に沿って Q を中心とする四分円ができる。

▶ **納屋の裏側。** $x \leq 2a$ より $4a - x \geq 2a$ であるから、ロープは S に届き、なお $(4a - x) - 2a = 2a - x$ の余裕がある。これが辺 SR の裏側に S を中心とする四分円を描く。同様に、ロープは R に届いて $(2a + x) - 2a = x$ が残り、R を中心とする半径 x の四分円ができる。



考えてみよう 納屋の裏側の2つの部分が重なり、同じ草を二重に数えてしまうことはないだろうか？

S と R を中心とする四分円は、直線 SR に関して同じ側にある。それらの半径 $2a - x$ と x の和は $2a = SR$ であるから、2つの円は SR 上の S から $2a - x$ の点でちょうど接する。したがって両者は重ならず、2つを合わせるとヤギは辺 SR 全体に届く。ほかに重なる部分もない。半円は直線 PQ の一方の側にあり、4つの四分円は他方の側にあって、それぞれ納屋の横または裏の自分の領域に収まっているからである。また、納屋の裏側の点に届くのは、その点が S または R から残りのロープの長さ以内にあるときであり、かつそのときに限るので、取りこぼしもない。

面積

半円と4つの四分円を足し合わせると

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\pi(4a)^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left[(4a - x)^2 + (2a + x)^2 + (2a - x)^2 + x^2\right] \\ &= 8\pi a^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left(4x^2 - 8ax + 24a^2\right) \\ &= \pi\left(x^2 - 2ax + 14a^2\right) \\ &= \pi\left[(x - a)^2 + 13a^2\right]. \end{aligned}$$

この式は $[0, 2a]$ のすべての x で成り立つ。両端（$x = 0$ または $x = 2a$、すなわちヤギが角につながれている場合）では四分円の1つが1点に縮み、半円と半径 $4a$ の四分円がつながって円の4分の3になる。これは予想どおりである。

最大値と最小値

$0 \le x \le 2a$ では $-a \le x - a \le a$ であるから、$0 \le (x-a)^2 \le a^2$ となる。よって

$$13\pi a^2 \le A \le 14\pi a^2,$$

であり、$A \le 14\pi a^2$ が示された。右側の等号が成り立つのは $x = 0$ または $x = 2a$、すなわちヤギが角につながれているときであり、かつそのときに限る。左側の下界は $x = a$ で達成されるので、A の最小値（minimum value）は

$$A_{\min} = 13\pi a^2,$$

であり、これはヤギが辺の中点につながれているときに得られる。

検算

- 角（$x = 0$）では、半径 $4a$ の円の 4 分の 3（$12\pi a^2$）、隣の辺の反対側の角の周りにできる半径 $2a$ の四分円（πa^2）、納屋の裏側にできる半径 $2a$ の四分円（πa^2）が得られる。合計は $14\pi a^2$ であり、式と一致する。
- $a = 1$ として細かい格子上で草を食べられる面積を見積もった。各点について、納屋を回る本当の最短距離（直線、または角で曲がった折れ線）で判定した。その結果、中点では $13\pi \approx 40.841$ に対して 40.845、角では $14\pi \approx 43.982$ に対して 43.988 が得られ、ほかのつなぎとめる点でも同様に一致した。

よくある間違い

- 納屋の裏側の部分を忘れること。ロープは十分に長く、それぞれの側で 2 つの角を回り込める。
- 納屋の裏側の 2 つの部分が重なるのではないかと心配したり、無理に重なりを計算に入れたりすること。それらの半径の和はつねにちょうど $2a$ であるから、2 つの円は接するだけである。

STEP のその先へ

ぴんと張ったロープは**測地線**（geodesic）、すなわち障害物のある領域における最短経路に沿う。ここではそれが納屋の角でのみ曲がる線分からなるので、ヤギが届く点の集合は、非ユークリッド的な距離の測り方における「球」（ball）になっている。障害物を回り込む最短経路の問題は、変分法（calculus of variations）や、計算機科学に

おける経路計画（motion planning）の問題へとつながっていく。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、注意深い場合分けによって幾何の問題が簡単な代数に変わる、この種の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。