解答例

STEP I 2006、第 11 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP I 2006、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q11

鍵となる考え方

衝突を一つずつ追いかけることはできない。そもそも $A_1, \ldots, A_{n-2}$ の質量すらわからないからである。そこで、最終状態だけに注目する。最終状態を制約する事実は二つある。運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）は、最初と最後で等しい。そして衝突がすべて終わった後では、どの粒子も前方の粒子に追いつくことはないので、最終速度は溝に沿って（広義に）増加する。各小問は、これら二つの事実がどのような最終状態を許すかについての短い議論になる。

解答

準備

粒子は摩擦なく一直線上を動く点としてモデル化し、すべての衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic collision）であるとする。A_0 の初めの運動の向きを正とし、v_k を A_k の最終速度とする（$k = 0, 1, \ldots, n$）。A_k の質量を m_k と書くと、$m_0 = m_{n-1} = m$、$m_n = \lambda m$ である。保存則より

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k = mu, \tag{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k^2 = mu^2. \tag{E}$$

粒子は溝の中で互いに追い越すことができないので、$A_0, A_1, \ldots, A_n$ の順に並んだままである。もし最後にある k について $v_k > v_{k+1}$ であれば、A_k は A_{k+1} に追いつき、も

う一度衝突が起こる。したがって、すべての衝突の後では

$$v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_n. \tag{O}$$

特に、前向きに動いている粒子の前方に静止した粒子があってはならず、後ろ向きに動いている粒子の後方に静止した粒子があってはならない。

小問 (i)

最後に A_j だけが速度 v で動いているとする。このとき (M) と (E) から $m_j v = mu$ および $m_j v^2 = mu^2$ が得られる。辺々割ると $v = u$ となり、したがって $m_j = m$ である。

$v = u > 0$ であるから、順序条件 (O) により、A_j より前方の粒子はすべて速度が u 以上でなければならない。しかしそれらはすべて静止しているので、前方に粒子は存在せず、$A_j = A_n$ である。ところが $\lambda > 1$ より A_n の質量は $\lambda m \neq m$ である。これは矛盾であるから、最後にちょうど一つの粒子だけが動いていることはありえない。

小問 (ii)

A_{n-1} と A_n だけがそれぞれ速度 p、q で動いているとする。(M) と (E) を m で割ると

$$p + \lambda q = u, \qquad p^2 + \lambda q^2 = u^2.$$

$p = u - \lambda q$ を第 2 式に代入すると $-2\lambda uq + \lambda^2 q^2 + \lambda q^2 = 0$、すなわち

$$\lambda q((1+\lambda)q - 2u) = 0.$$

A_n は動いているので $q \neq 0$ であり、

$$q = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad p = u - \frac{2\lambda u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{1+\lambda} < 0.$$

よって A_{n-1} は後ろ向きに動いていることになる。しかし $n \ge 2$ なので、その後方には粒子 A_{n-2} があり、仮定よりその粒子は静止している。すると $v_{n-2} = 0 > p = v_{n-1}$ となり、(O) に矛盾する。A_{n-1} は A_{n-2} にぶつかってしまうのである。したがって、この最終状態もありえない。

小問 (iii)

ここでの主な道具は次の事実である。

補題（lemma）。運動の最後において、後ろ向きに動いている粒子が存在する。

証明。そうでないと仮定し、すべての k について $v_k \ge 0$ とする。(O) より、v_n が最大の速度である。$0 \le v_k \le v_n$ かつ $m_k > 0$ であるから、(E) の各項は $m_k v_k^2 \le v_n\, m_k v_k$ を

満たす。これらを足し合わせて (M) を用いると

$$mu^2 = \sum m_k v_k^2 \leq v_n \sum m_k v_k = v_n\, mu, \qquad \text{よって} \qquad v_n \geq u.$$

一方、(M) の各項は非負であるから、一つの項 $\lambda m v_n$ は総和以下である：

$$\lambda m v_n \leq mu, \qquad \text{よって} \qquad v_n \leq \frac{u}{\lambda} < u,$$

ここで $\lambda > 1$ と $u > 0$ を用いた。これら二つの評価は互いに矛盾する。 □

考えてみよう $A_1, \ldots, A_{n-2}$ の質量は一度も与えられていない。それでも問題にならないのはなぜか？

補題は (M)、(E)、(O) と A_n の質量しか用いていないので、他の質量が何であっても成り立つ。だからこそ、この問題はそもそも解くことができるのである。

次に、最後に A_{n-2}、A_{n-1}、A_n だけが動いているとする。

$n \geq 3$ の場合、A_{n-2} の後方に静止した粒子 A_{n-3} がある。(O) より $v_{n-2} \geq v_{n-3} = 0$ であり、さらに $v_{n-1}, v_n \geq v_{n-2} \geq 0$ である。すべての粒子の速度が ≥ 0 となるが、これは補題により禁じられる。

$n = 2$ の場合、三つの粒子は A_0、A_1、A_2 であり、これで全部である。このとき運動は完全に決まる。A_0 が A_1 に衝突すると（質量が等しいので）速度が入れ替わり、A_0 は止まって A_1 が速さ u で進む。次に A_1 が A_2 に衝突し、小問 (ii) の計算（衝突前の速度が u と 0 の場合）により、A_1 は速度 $-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ ではね返り、A_2 は $\frac{2u}{\lambda+1}$ で進んでいく。最後に A_1 が静止している A_0 に衝突し、ここでも質量が等しいので速度が入れ替わる。その後、A_0 は後ろ向きに動き、A_1 は静止し、A_2 は前向きに動くので、(O) が成り立ち、それ以上衝突は起こらない。A_1 は最後に静止しているので、やはり三つすべてが動いていることはありえない。

小問 (iv)

最後にちょうど二つの粒子が動いているとする。(M) より全運動量は $mu > 0$ なので、少なくとも一方は前向きに動いている。補題より、少なくとも一方は後ろ向きに動いている。したがって一方を A_i とすると $v_i < 0$ であり、他方を A_j とすると $v_j > 0$ である。

考えてみよう これら二つの粒子はどれでありうるか？

(O) より、A_i の後方にある粒子はすべて速度が $\leq v_i < 0$ なので、動いている。他に動いているのは A_j だけであり、それは前向きに動いているから、A_i の後方には何もない。すなわち $A_i = A_0$ である。同様に、A_j の前方にある粒子はすべて速度が $\geq v_j > 0$ なので、そのような粒子は存在せず、$A_j = A_n$ である。

よって A_0（質量 m）と A_n（質量 λm）がそれぞれ速度 $a<0$、$b>0$ で動いている。(M) と (E) は

$$a+\lambda b=u, \qquad a^2+\lambda b^2=u^2,$$

となり、これはまさに小問 (ii) の方程式である。$b\neq 0$ であるから

$$b=\frac{2u}{\lambda+1}, \qquad a=-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}.$$

したがって、動いている二つの粒子は、速さ $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ で後ろ向きに動く A_0 と、速さ $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ で前向きに動く A_n である。
これは実際に起こりうる。小問 (iii) の $n=2$ の場合が、ちょうどこの状態で終わるからである。

検算

- $\lambda=3$、$u=4$ とすると、速さは 2 と 2 である。このとき運動量は $m(-2)+3m(2)=4m$、エネルギーは $\frac{1}{2}m(4)+\frac{1}{2}(3m)(4)=8m=\frac{1}{2}m(16)$ となり、正しく一致する。
- $\lambda\to 1$ とすると、A_0 の最終速さは 0 に、A_n の最終速さは u に近づく。すべての質量が等しい場合、ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）のように、速度が列に沿って受け渡されるだけである。
- 60,000 通りのランダムな設定（n は 2 から 6、$A_1,\dots,A_{n-2}$ の質量はランダム、λ と間隔もランダム）について、衝突の全過程をシミュレーションした。A_0 は常に後ろ向きに動いて終わり、(i)–(iii) の最終状態は一度も現れず、ちょうど二つの粒子が動いていた場合はいつも、それらは上の速さをもつ A_0 と A_n であった。

よくある間違い

- すべての衝突を追跡しようとすること。途中の粒子の質量は未知なので、解析できるのは最終状態だけである。
- 順序条件 (O) を忘れること。保存則だけでは小問 (ii) の状態は排除されない。それを排除するのは順序条件である。
- A_{n-2} が A_0 ではないと思い込むこと。$n=2$ のときは A_{n-2} が A_0 であり、小問 (iii) には別の（短い）議論が必要になる。

STEP のその先へ

補題は二つの保存量（conserved quantities）の間の不等式である。すべての速度が非負であれば、エネルギーは（最大の速度）×（運動量）を超えることができない。このように、力学を解くことなく、保存量と順序を用いて最終状態を排除する議論は、多粒子系の研究に典型的なものである。次の一歩としては Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。この本は衝突、重心系（centre-of-mass frame）、保存則（conservation laws）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。