解答例

STEP I 2006、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2006、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q10

鍵となる考え方

軌道は放物線（parabola）であり、屋根は直線である。したがって「ちょうど接する」とは、その直線が**接線**（tangent）であることを意味する。一方を他方に代入すると x の 2 次方程式が得られ、それが重解（repeated root）をもつということである。符号の問題は、その重解がどこにあるかを考えることで決着する。最後の小問では、2 つの粒子が出会えるのは P が屋根に達する点だけであるから、Q はちょうど P が到達する瞬間にその点へ到達しなければならない。その時刻における水平方向の位置を比較すれば結果が得られる。

解答

軌道

P を、空気抵抗のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化する。初速度の成分は水平・鉛直ともに $V\cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$ であるから、時刻 t において

$$x = \frac{Vt}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{Vt}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$ を用いて t を消去すると $\frac{1}{2}gt^2 = gx^2/V^2$ となるので、軌道は

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

屋根に接する条件

P が屋根に達するのは $x - gx^2/V^2 = x\tan\alpha + b$、すなわち

$$\frac{g}{V^2}\,x^2 + (\tan\alpha - 1)\,x + b = 0. \qquad (*)$$

となるところである。（横切るのではなく）接するということは、$(*)$ が重解をもつこと、すなわち判別式（discriminant）が 0 であることを意味する：

$$(\tan\alpha - 1)^2 = \frac{4gb}{V^2} \quad \Longrightarrow \quad V(\tan\alpha - 1) = \pm 2\sqrt{bg}.$$

考えてみよう どちらの符号も判別式の条件を満たす。両者を区別するものは何か。

$(*)$ の重解は

$$x_0 = -\frac{(\tan\alpha - 1)V^2}{2g} = \frac{(1 - \tan\alpha)V^2}{2g}.$$

である。粒子は x が増加する向きに運動する（$x = Vt/\sqrt{2}$ であるから）ので、屋根に接することができるのは $x_0 > 0$ のときに限られる。よって $\tan\alpha - 1 < 0$ でなければならず、$V > 0$ であるから左辺 $V(\tan\alpha - 1)$ は負である。したがって

$$V(-1 + \tan\alpha) = -2\sqrt{bg},$$

となり、示すべき式が得られた。（正の根をとると、接点は $x_0 < 0$、すなわち放物線を後ろ向きに延長した部分にあることになり、P はそこを決して通らない。）幾何学的には、屋根の傾きは初めの運動方向より緩やかでなければならない。つまり $\alpha < 45^\circ$ である。そうでなければ屋根は直線 $y = x$ より常に上にあり、放物線は $x > 0$ においてその直線より下にあるからである。

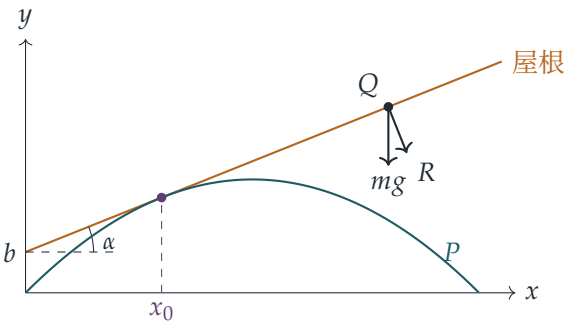
接する時刻

$x = Vt/\sqrt{2}$ であるから、接する時刻は

$$T = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{V} = \frac{\sqrt{2}\,(1 - \tan\alpha)V}{2g} = \frac{V(1 - \tan\alpha)}{\sqrt{2}\,g}.$$

レール上の粒子

Q を、直線 $y = x\tan\alpha + b$ に沿ったなめらかなレール上の質点としてモデル化する。Q は $(0, b)$ からレールに沿って x が増加する向きに打ち出される（x が常に正である P に到達するためには、そうでなければならない）。Q にはたらく力は、重力 mg と、レールに垂直なレールからの垂直抗力（normal reaction）R である。図はこれらの力と、$x = x_0$ で屋根に接する P の軌道を示している。



摩擦はないので、レールに沿って斜面の上向きに力を分解すると

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha,$$

ここで s は $(0,b)$ からレールに沿って測った Q の距離である。$t=0$ で $s=0$、$\dot{s}=U$ であるから

$$s = Ut - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha, \qquad x_Q = s\cos\alpha.$$

P は接点以外では決して屋根の上になく、Q は常に屋根の上にある。したがって、2 つの粒子が接触できるのは、時刻 T に Q がその点にあるときに限られる。このとき両粒子はともに屋根の直線上にあるので、時刻 T において x 座標が一致すれば十分である：

$$\left(UT - \tfrac{1}{2}gT^2\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{VT}{\sqrt{2}}.$$

$T>0$ で割り、$gT = V(1-\tan\alpha)/\sqrt{2}$ を代入すると

$$U\cos\alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{V(1-\tan\alpha)}{\sqrt{2}}.$$

$2\sqrt{2}$ を掛け、$\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin^2\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\,U\cos\alpha &= 2V + V\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\tan\alpha) \\ &= V\left(2+\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha\right), \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 単位：$V(1-\tan\alpha)/g$ は速さを加速度で割ったものなので時間である。また $\sqrt{bg}$ は速さであり、$V(\tan\alpha-1)$ も速さである。
- 極限の場合 $\alpha\to 0$（平らな屋根）：$b = V^2/(4g)$ はおなじみの最高点の高さ $(V\sin 45^\circ)^2/(2g)$ であり、そこに達する時刻は $T = V/(\sqrt{2}g)$ である。また Q は

レールに沿った力を受けないので、P の水平方向の速さと一致しなければならず、$U = V/\sqrt{2}$ となる。公式はちょうどこれを与える。

- 数値的には、$g = 9.8$、$V = 10$、$\alpha = 0.3$ rad のとき接点は $x_0 \approx 3.524$ にある。ランダムな V と $\alpha < \pi/4$ に対して、導いた U を用いて Q をレールに沿って数値的に進めると、時刻 T において Q は 10^{-6} 以内の誤差で P の位置に一致し、それ以外のすべての時刻で P は屋根より下にある。

よくある間違い

- Q の加速度を $-g$ や $-g\cos\alpha$ とすること。レールに沿ってはたらくのは、重力のレール方向の成分 $g\sin\alpha$ だけである。
- U を水平方向の速さとして扱うこと。U はレールに沿った速さであるから、Q の水平方向の変位は $s\cos\alpha$ である。
- 負の根を選ぶ理由を「速さは正だから」とだけ述べること。決め手となるのは x_0 の符号（同値な言い方をすれば $\tan\alpha < 1$）である。

STEP のその先へ

接する条件は、より一般的な考え方の特別な場合である。曲線の族が到達できる領域の境界はそれらの**包絡線**（envelope）であり、それを求めることは、2 次方程式が重解をもつのはいつかを問うことに帰着する。一定の速さであらゆる方向に打ち出される物体の場合、包絡線は「安全放物線」（parabola of safety）である。Q の運動は最も単純な束縛運動（constrained motion）であり、大学 1 年次の講義では束縛をラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）によって体系的に扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動と束縛運動の両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。