解答例

STEP III 2005、第 9 問

力学 ・ 衝突と反発係数

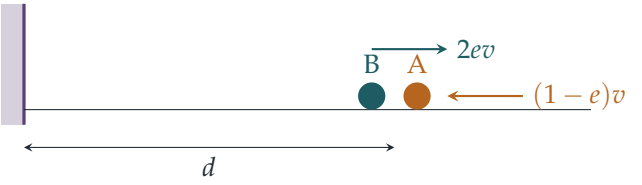
> **STEP III 2005、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q9

鍵となる考え方

質量は奇妙に見えるが、最初の衝突で非常にすっきりした答えが得られるように選ばれている。2 回目の衝突まで求めたら、その直前の速度を最初の衝突の直前の速度と比べてみよう。それらは同じものに、それぞれ e を掛けたものになっている。衝突の法則は速度について線形（linear）であるから、以後の出来事はすべて縮小された規模で繰り返され、それによって以降のすべての衝突が一挙にわかる。

解答

A と B を滑らかな水平な直線上の質点としてモデル化し、各衝突でニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）を用いる。**壁に向かう向き**を正とし、距離は壁から測る。



（図は最初の衝突の直前の瞬間を示しており、2 つの質点を少し離して描いている。）

最初の衝突

衝突後の A と B の速度（壁に向かう向きを正とする）を v_A, v_B とする。衝突前、A の速度は $(1-e)v$、B の速度は $-2ev$ である。

運動量保存則（conservation of momentum）より

$$\begin{aligned} 4em\,v_A + (1-e)^2 m\,v_B &= 4em(1-e)v - (1-e)^2 m\cdot 2ev \\ &= 2e(1-e)v[2-(1-e)]m = 2e(1-e)(1+e)v\,m. \end{aligned}$$

近づく速さは $(1-e)v + 2ev = (1+e)v$ であるから、ニュートンの法則より

$$v_B - v_A = e(1+e)v.$$

$v_B = v_A + e(1+e)v$ を運動量の式に代入し、m で割ると

$$[4e + (1-e)^2]v_A = 2e(1-e)(1+e)v - (1-e)^2 e(1+e)v = e(1-e)(1+e)v[2-(1-e)].$$

$4e + (1-e)^2 = (1+e)^2$ であるから、右辺は $e(1-e)(1+e)^2 v$ となり、したがって

$$v_A = e(1-e)v, \qquad v_B = e(1-e)v + e(1+e)v = 2ev.$$

どちらも正である。すなわち、衝突後 **A は速さ** $e(1-e)v$ **で壁に向かって進み、B は速さ** $2ev$ **で壁に向かって進む**。

2 回目の衝突

B のほうが速いので、B は A を引き離し、時間 $t_1 = d/(2ev)$ の後に壁に達する。その間に A は $e(1-e)v \cdot \frac{d}{2ev} = \frac{1}{2}(1-e)d$ 進むので、A は壁から距離

$$d - \tfrac{1}{2}(1-e)d = \tfrac{1}{2}(1+e)d$$

の位置にある。B は速さ $e\cdot 2ev = 2e^2 v$ で跳ね返り、今度は壁から遠ざかる向きに動く。一方 A は依然として速さ $e(1-e)v$ で壁に向かっている。両者は互いに近づいており、その接近の速さは $e(1-e)v + 2e^2 v = e(1+e)v > 0$ であるから、必ず再び出会う（B が両者の間にあるので、A が壁に達するより前に出会う）。それに要する時間は

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}(1+e)d}{e(1+e)v} = \frac{d}{2ev},$$

であり、その間に B は壁から $2e^2 v \cdot \frac{d}{2ev} = ed$ 進む。よって **2 回目の衝突が壁から距離** de **の位置で起こる**。これが示すべきことであった。

その後の衝突

考えてみよう 同じ計算をすべてやり直すことなく、さらに衝突が起こることをどのように導けるだろうか。

2 回目の衝突の直前の状態を見てみよう。A は速さ $e(1-e)v$ で壁に向かって動き、B は速さ $2e^2v = 2e(ev)$ で壁から遠ざかっている。これはちょうど、初期状態において v を ev に、d を de に置き換えたものである（質量と e は変わらない）。上で行ったことはすべて任意の $v > 0, d > 0$ について成り立つので、同じ議論が (v, d) の代わりに (ev, de) に対しても適用できる。すなわち、3 回目の衝突が距離 $(de)e = de^2$ の位置で起こり、その直前の状態は初期状態で (e^2v, de^2) としたものになる。数学的帰納法（induction）により、すべての n に対して第 $(n+1)$ 回目の衝突が起こるので、衝突は限りなく続く。

第 n 回目の衝突の直前の状態は、初期状態において v と d をそれぞれ $e^{n-1}v$ と de^{n-1} に置き換えたものであるから、

第 n 回目の衝突は壁から距離de^{n-1} の位置で起こる。

2 つ目の部分より、ある衝突から次の衝突までの時間は $t_1 + t_2 = d/(ev)$ である。第 n 回目の衝突から始めると、これは

$$\frac{de^{n-1}}{e \cdot e^{n-1}v} = \frac{d}{ev},$$

となり、n によらない。よって、相続く衝突の間の時間はすべて等しく、$d/(ev)$ である。距離と速さはどちらも 1 周期ごとに e 倍に縮み、時間においてはこの 2 つの効果が打ち消し合うのである。

検算

- 最初の衝突における運動量：$e = \frac{1}{2}, m = v = 1$ とすると、質量は 2 と $\frac{1}{4}$ である。衝突前は $2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$、衝突後は $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ である。相対速度は $\frac{3}{2}$ から $\frac{3}{4}$ へと、e 倍になっている。
- e, v, d, m を無作為に 200 通り選び、それぞれについて 8 回の衝突まで運動を（分数を用いて）厳密にシミュレーションした。すべての衝突は de^{n-1} の位置で起こり、間隔はすべて $d/(ev)$ であった。$e = \frac{1}{2}, v = d = 1$ のとき、衝突は時刻 $0, 2, 4, 6$、距離 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ で起こる。

よくある間違い

- 符号の取り違え：B は最初、壁から**遠ざかる**向きに動いているので、我々の取り決めではその初速度は負である。
- 壁との衝突でも反発係数が e であることを忘れること。B が壁を離れる速さは $2ev$ ではなく $2e^2v$ である。

- スケーリングに気づかずに、2 回目の衝突を力ずくで計算し直すこと。それでも解けるが、はるかに長くなり、規則性を見落としやすい。

STEP のその先へ

ここでの推論は線形性と**自己相似性**（self-similarity）を用いている。すべての速度に同じ定数を掛けても衝突の方程式は変わらないので、定数倍を除いて自分自身を再現する状態は限りなく繰り返される。同じ考え方は、無限回跳ねるボールの解析や、より一般には次元解析（dimensional analysis）の根底にもある。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と運動量をこのような丁寧さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。