解答例

STEP III 2005、第 8 問

純粋数学 ・ 複素数と円

> **STEP III 2005、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q8

鍵となる考え方

アルガン図（Argand diagram）におけるあらゆる長さは、$|z|^2 = zz^*$ を用いて代数の式に書き換えることができる。最初の恒等式が得られれば、直角はピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）に帰着し、接線（tangent）は接線と半径（radius）のなす直角に帰着する。こうして「OA が円に接する」という条件はただ一つの方程式となり、それによって半径の 2 乗が $cc^* - aa^*$ と定まる。その後は、「P が円上にある」ことも「P' が円上にある」ことも、同じ方程式に帰着するのである。

解答

恒等式と直角

$|z|^2 = zz^*$ であり、共役（conjugate）をとる操作は差を保つから、

$$\begin{aligned} |a-c|^2 &= (a-c)(a-c)^* = (a-c)(a^*-c^*) \\ &= aa^* + cc^* - ac^* - ca^*, \end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

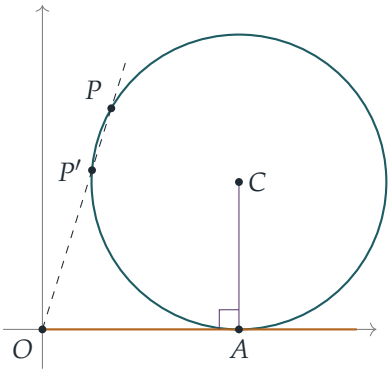
三角形 OAC の辺の長さは $OA = |a|$、$OC = |c|$、$AC = |a-c|$ であり、a、c は 0 でなく互いに異なるから、いずれも 0 ではない。ピタゴラスの定理とその逆（converse）により、A における角が直角であることは $OC^2 = OA^2 + AC^2$ と同値であり、すなわち

$$cc^* = aa^* + (aa^* + cc^* - ac^* - ca^*) \iff 2aa^* = ac^* + ca^*.$$

と同値である。ここでの各段階はすべて逆にたどれるので、「同値」が成り立つ。

（ピタゴラスの定理の逆は、退化した（degenerate）「三角形」の場合も排除している。もし O、A、C が一直線上にある（collinear）ならば、3 つの長さのうち 1 つが他の 2 つの和に等しくなるが、3 つの長さがすべて正のとき、これは $OC^2 = OA^2 + AC^2$ と両立し得ない。）

接する円



接線は接点において半径と垂直である。したがって OA が A で接することは、角 OAC が直角であることを意味し、前半の結果より

$$2aa^* = ac^* + ca^*. \qquad (*)$$

が成り立つ。半径 r は、$(*)$ を用いると $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - (ac^* + ca^*) = cc^* - aa^*$ を満たす。（これは再びピタゴラスの定理 $r^2 = OC^2 - OA^2$ にほかならない。）

$k = bb^* > 0$、$s = abc^* + a^*b^*c$ とおく。すると

$$|ab-c|^2 = (ab-c)(a^*b^*-c^*) = aa^*k - s + cc^*,$$
$$\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = \left(\frac{a}{b^*} - c\right)\left(\frac{a^*}{b} - c^*\right) = \frac{aa^*}{k} - \frac{ac^*}{b^*} - \frac{a^*c}{b} + cc^*.$$

である。2 つ目の式に $k = bb^*$ を掛けると

$$k\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = aa^* - s + k\,cc^*. \qquad (**)$$

を得る。

P が円上にある場合。 $|ab-c|^2 = cc^* - aa^*$ が成り立つことは、

$$aa^*k - s + cc^* = cc^* - aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

と同値である。

P' が円上にある場合。 $|a/b^* - c|^2 = cc^* - aa^*$ が成り立つことは、（$k \neq 0$ を掛けて $(**)$ を用いると）

$$aa^* - s + k\,cc^* = k\,cc^* - k\,aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

と同値である。2 つの条件は一致するので、P が円上にあることと P' が円上にあることは同値である。

逆の主張

ここで接するという仮定を外す。円の中心が C で、円が A を通るとすると、$r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$ である。さらに、$k = bb^* \neq 1$ として、ab と a/b^* がともにこの円上にあるとする。同じ展開を用いると

$$\begin{aligned} aa^*k - s + cc^* &= r^2, \\ aa^* - s + k\,cc^* &= kr^2 \qquad (\text{（}(**)\text{ より）}). \end{aligned}$$

となる。第 1 式から第 2 式を引くと s が消去される：

$$(k-1)\,aa^* - (k-1)\,cc^* = (1-k)\,r^2.$$

考えてみよう なぜ問題文では $bb^* \neq 1$ という条件が課されているのだろうか。

もし $bb^* = 1$ ならば $b^* = 1/b$ であるから $a/b^* = ab$ となり、2 点は一致してしまう。このとき「2 点がともに円上にある」というのはただ一つの条件にすぎず、接することを導くには到底足りない。代数の計算では、これはまさに $k-1 \neq 0$ で割る段階にあたる：

$$r^2 = cc^* - aa^*.$$

これを $r^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$ と比較すると $2aa^* = ac^* + ca^*$ を得る。前半の結果より、角 OAC は直角である。よって OA は円周上の点 A において半径 CA と垂直であり、これは OA が円の接線であることを意味する。

検算

- この結果の背後には、きれいな幾何学的理由がある。$\dfrac{a}{b^*} = \dfrac{ab}{bb^*}$ であるから、点 P' は P を正の実数 $1/|b|^2$ 倍したものである。したがって O、P、P' は一直線上にあり、$OP \cdot OP' = |a|^2 = OA^2$ が成り立つ。これはまさに方べきの定理（tangent–secant theorem）である（図を参照）。

- 数値で確かめるため、$a = 2$、$c = 2 + 1.5\mathrm{i}$（したがって $r^2 = 2.25 = |c|^2 - |a|^2$）とし、円上の点 $P = 0.701 + 2.25\mathrm{i}$ をとる。すると $b = P/2$、$P' = a/b^* \approx 0.505 + 1.620\mathrm{i}$ であり、$|P' - c|^2 \approx 2.250$ となる。
- コンピュータで、ランダムな a、b、c に対して恒等式と接する場合を確認した。また、$|b| \neq 1$ のもとで接しない円を 1000 個ランダムにとったところ、どの場合も P が円上にあると P' は円上にならなかった。

よくある間違い

- $(a-c)^* = a^* - c^*$ は正しく書けたのに、$|a-c|^2$ を $(a-c)^2$ と展開してしまう。絶対値（modulus）の 2 乗には共役が必要である。
- 逆の証明において、最初から接すること（したがって $r^2 = cc^* - aa^*$）を仮定してしまう。それこそが証明すべきことである。$r = |a-c|$ だけから出発すること。
- $1 - bb^*$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

$|a|^2/(ab)^* = aa^*/(a^*b^*) = a/b^*$ であるから、点 P' は写像 $z \mapsto |a|^2/z^*$ による P の像である。この写像は円 $|z| = |a|$ に関する**反転**（inversion）であり、各点を、O から出る同じ半直線上で距離が $|a|^2/OP$ である点に移す。この問題は、反転の円と直交する（orthogonal）円がそれ自身に移されることを示している。反転と、それが生成するメビウス変換（Möbius transformations）は、大学 1 年次の複素解析（complex analysis）と幾何学の中心的な題材である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『視覚的複素解析』）には、一章を丸ごと費やした見事な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。