解答例

STEP III 2005、第 7 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP III 2005、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q7

鍵となる考え方

冒頭の結果が述べているのは、被積分関数（integrand）の中に隠れている x^m という因子は、被積分関数の外側に $\frac{1}{x}$ という因子が単独で付いている限り、ひとつの新しい変数 $u = x^m$ として扱える、ということである。したがって、それぞれの積分について分母から x を 1 つくくり出し、残るべき乗 x^m と関数 f が何であるかを読み取り、代わりにはるかに易しい u の積分を計算すればよい。

解答

一般的な結果

$\mathrm{F}'(u) = \dfrac{1}{u\,\mathrm{f}(u)}$ が与えられている。$\mathrm{F}(x^m)$ を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると（任意の実数 m に対して x^m が意味をもつよう $x > 0$ とする）、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{F}(x^m) = \mathrm{F}'(x^m)\cdot m x^{m-1} = \frac{m x^{m-1}}{x^m\,\mathrm{f}(x^m)} = \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}.$$

よって $\mathrm{F}(x^m)$ は $\dfrac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}$ の原始関数（antiderivative）であり、これはまさに求める結果である：

$$\int \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x^m) + c.$$

言い換えれば、これは置換 $u = x^m$、$\mathrm{d}u = m x^{m-1}\,\mathrm{d}x$ を逆向きに読んだものである。以下では m で割るので、条件 $m \neq 0$ が重要になる。

実際には次の形で用いる。

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}(x^m) + c. \qquad (*)$$

小問 (i)

x を 1 つくくり出すと、

$$\frac{1}{x^n - x} = \frac{1}{x\,(x^{n-1} - 1)}.$$

これは $m = n - 1$、$\mathrm{f}(u) = u - 1$ とした $(*)$ の形である。$n \neq 1$ が必要である。$n = 1$ のときは分母 $x^n - x$ が恒等的に 0 となり、求めるべき積分は存在しない。

次に、$\dfrac{1}{u(u-1)}$ の原始関数 F が必要である。部分分数分解（partial fractions）により

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{F}(u) = \ln|u-1| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

$(*)$ に $u = x^{n-1}$ を代入すると：

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n - x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\,\ln\left|\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}}\right| + c, \qquad n \neq 1.}$$

絶対値記号があるので、この式は被積分関数が定義される任意の区間で成り立つ（たとえば $x > 1$ だけでなく $0 < x < 1$ でも成り立ち、n が整数のときは $x < 0$ でも成り立つ）。

小問 (ii)

ここでは平方根から x をくくり出す際に少し注意が必要である。x^n がすべての n に対して定義され、かつ $\sqrt{x^2} = x$ となる $x > 0$ で考える。すると

$$\sqrt{x^n + x^2} = \sqrt{x^2\,(x^{n-2} + 1)} = x\sqrt{1 + x^{n-2}},$$

となるので、被積分関数は

$$\frac{1}{x\sqrt{1 + x^{n-2}}},$$

であり、これは $m = n - 2$、$\mathrm{f}(u) = \sqrt{1+u}$ とした $(*)$ の形である。

考えてみよう $n = 2$ のときはどうなるか？

このとき $m = 0$ となり、一般的な結果は適用できない。しかし直接計算すれば積分は易しい。被積分関数は $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$ なので、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln x + c \qquad (n = 2).$$

$n \neq 2$ のときは、$u = x^{n-2} > 0$ として $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$ が必要である。$t = \sqrt{1+u}$ と置換すると、$u = t^2 - 1$、$\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$、$t > 1$ であり、

$$\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2t}{(t^2-1)\,t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

となる。$t > 1$ なので絶対値は不要である。これはきれいに整理できる。分子と分母に $t-1$ を掛け、$t^2 - 1 = u$ を用いると、

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{F}(u) = 2\ln\left(\sqrt{1+u}-1\right) - \ln u.$$

ここで $m = n-2$ として $(*)$ に $u = x^{n-2}$ を代入する。項 $-\ln u$ は $-(n-2)\ln x$ となり、$m = n-2$ で割ると $-\ln x$ になる：

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^n + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-2}\ln\left(\sqrt{1+x^{n-2}}-1\right) - \ln x + c, \qquad n \neq 2,\ x > 0.}$$

同値な形として、答えは $\dfrac{1}{n-2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^{n-2}}-1}{\sqrt{1+x^{n-2}}+1}\right) + c$ とも書ける。どちらの形でもよい。

検算

- 答えを微分して戻す。(i) で $n = 2$ とすると、公式は $\ln|x-1| - \ln|x|$ を与え、その導関数は $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2-x}$ であり、確かに正しい。
- (i) で $n = 3$ とすると、公式から $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - x} = \frac{1}{2}\ln\frac{32}{27} \approx 0.084950$ が得られ、シンプソンの公式（Simpson's rule）による値と一致する。
- (ii) で $n = 3$ とすると、公式から $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + x^2}} = \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3} \approx 0.664135$ が得られ、これも数値積分と一致する。また、負の値や整数でない値も含め、多くの n について両方の公式を検証した。

よくある間違い

- 因子 $\frac{1}{m}$ を忘れること。一般的な結果では分子に m があるが、ここでの被積分関数にはないので、m で割らなければならない。
- 断りなしに $\sqrt{x^2} = x$ と書くこと。これは $x \geq 0$ のときにしか成り立たない。$x < 0$ のときは $-x$（あるいは $|x|$）である。
- $m = 0$ となる例外的な値、すなわち (i) の $n = 1$ と (ii) の $n = 2$ を見落とすこと。

STEP のその先へ

冒頭の結果は、置換積分法（substitution rule）を反対側から見たものである。置換積分とは合成関数の微分法を逆向きに使うことにほかならず、解析学（analysis）の最初の講義では、関係する関数に対する注意深い仮定のもとで、まさにそのようにして証明される。(ii) のような多項式の平方根を含む積分からは、そもそもどの積分が初等関数（elementary functions）で表せるのか、という問いが生まれる。たとえば $\int \mathrm{d}x/\sqrt{1+x^4}$ は初等関数では表せない。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）と置換積分の厳密な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。