解答例

STEP III 2005、第 6 問

純粋数学 • 3 次方程式を解く

> **STEP III 2005、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q6

鍵となる考え方

恒等式 $4\cosh^3 y - 3\cosh y = \cosh 3y$ は、x を適切な定数倍に置き換えれば、x^2 の項をもたない 3 次式（depressed cubic）$x^3 - 3bx$ とまったく同じ形をしている。したがって、x^2 の項のない 3 次方程式は、3 倍角の公式（triple-angle formula）に当てはめることで解くことができ、さらに arcosh を対数で表すことで、双曲線関数（hyperbolic function）による答えを 3 乗根の形に戻すことができる。1 つの解がわかれば、因数分解によって残りの 2 つの解を与える 2 次方程式が得られ、1 の 3 乗根（cube roots of unity）を用いるとそれらがすっきりと整理される。

解答

双曲線関数による解

$x = 2a\cosh\frac{1}{3}T$ とおく。すると

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x &= 8a^3\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 6a^3\cosh\tfrac{1}{3}T \\ &= 2a^3(4\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 3\cosh\tfrac{1}{3}T) \\ &= 2a^3\cosh T, \end{aligned}$$

となる。ここで、与えられた恒等式を $y = \frac{1}{3}T$ として用いた。よって $2a\cosh\frac{1}{3}T$ は方程式を満たし、題意は示された。

$x^3 - 3bx = 2c$ の1つの解

まず $c > 0$ の場合を考える。$b > 0$ であるから $a = \sqrt{b} > 0$ ととることができ、このとき $3a^2 = 3b$ である。あとは $2a^3 \cosh T = 2c$、すなわち

$$\cosh T = \frac{c}{b^{3/2}}.$$

となればよい。そのためには $c/b^{3/2} \geq 1$ が必要であり、まさにここで条件が使われる。$c > 0$ のもとで $c^2 \geq b^3$ ならば $c \geq b^{3/2}$ である。よって

$$T = \operatorname{arcosh} \frac{c}{b^{3/2}} = \ln\left(\frac{c}{b^{3/2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^3} - 1} \right) = \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^3}}{b^{3/2}}.$$

ととることができる。したがって

$$e^{T/3} = \frac{(c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}}{b^{1/2}} = \frac{u}{\sqrt{b}}, \qquad e^{-T/3} = \frac{\sqrt{b}}{u},$$

であり、前半の結果から1つの解は

$$2\sqrt{b} \cosh \tfrac{1}{3} T = \sqrt{b} \left(\frac{u}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{u} \right) = u + \frac{b}{u}.$$

である。

> **考えてみよう** $c < 0$ の場合はどうなるか。このとき $c/b^{3/2} \leq -1$ となり、cosh がその値をとるような実数 T は存在しない。

x を $-x$ に置き換える。すると方程式は $x^3 - 3bx = -2c$ となり、$-c > 0$ であるから、いま扱った場合により、$u' = (-c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}$ として解 $u' + b/u'$ をもつ。したがって $-(u' + b/u')$ はもとの方程式の解である。ここで

$$u^3 u'^3 = (\sqrt{c^2 - b^3} + c)(\sqrt{c^2 - b^3} - c) = (c^2 - b^3) - c^2 = -b^3,$$

であるから、実数の3乗根をとれば $u' = -b/u$ となり、$-(u' + b/u') = u + b/u$ である。よって、c の符号によらずこの公式が成り立つ。(なお、$b > 0$ のとき $\sqrt{c^2 - b^3} < |c|$ であるから、どちらの場合も $u \neq 0$ である。)

残りの2つの解

$r = u + \frac{b}{u}$ とおく。r は解であるから $x - r$ は因数であり、

$$x^3 - 3bx - 2c = (x - r)(x^2 + rx + q) = x^3 + (q - r^2)x - rq$$

の係数を比較すると(x^2 の項は自動的に消える)、$q = r^2 - 3b$ でなければならない。展開すると

$$q = u^2 + 2b + \frac{b^2}{u^2} - 3b = u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b,$$

となるので、残りの 2 つの解は

$$x^2+\left(u+\frac{b}{u}\right)x+u^2+\frac{b^2}{u^2}-b=0,$$

を満たし、題意は示された。（整合性の確認として、定数項も一致する。実際 $rq=u^3+b^3/u^3$ であり、分母を有理化すると $b^3/u^3=b^3/(c+\sqrt{c^2-b^3})=c-\sqrt{c^2-b^3}$ となるので、$rq=2c$ である。）

この 2 次方程式を解くために $v=b/u$ とおくと、$uv=b$ であり、2 次方程式は

$$x^2+(u+v)x+(u^2-uv+v^2)=0.$$

となる。ここで $\omega^3=1$ かつ $1+\omega+\omega^2=0$ である。$x_1=\omega u+\omega^2 v$ と $x_2=\omega^2 u+\omega v$ を試すと

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=(\omega+\omega^2)(u+v)=-(u+v),\\ x_1x_2&=\omega^3u^2+\omega^2uv+\omega^4uv+\omega^3v^2=u^2+(\omega^2+\omega)uv+v^2=u^2-uv+v^2.\end{aligned}$$

となる。これらはこの 2 次方程式の 2 解の和と積に一致するので、その解は

$$x=\omega u+\omega^2\frac{b}{u}\qquad\text{および}\qquad x=\omega^2u+\omega\frac{b}{u}.$$

である。$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$、$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ であるから、これらは $-\frac{1}{2}(u+\frac{b}{u})\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(u-\frac{b}{u})\mathrm{i}$ と書くこともできる。

$x^3-6x=6$ を解く

これは $b=2$、$c=3$ とした $x^3-3bx=2c$ であり、$c^2=9\geq 8=b^3>0$ であるから、これまでの結果が使える。このとき

$$u=(3+\sqrt{9-8})^{1/3}=4^{1/3}=2^{2/3},\qquad \frac{b}{u}=\frac{2}{2^{2/3}}=2^{1/3}.$$

である。よって解は

$$x=2^{2/3}+2^{1/3},\qquad x=-\tfrac{1}{2}(2^{2/3}+2^{1/3})\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}(2^{2/3}-2^{1/3})\mathrm{i},$$

であり、複素数の組は $\omega\,2^{2/3}+\omega^2\,2^{1/3}$ とその共役複素数である。

検算

- 実数解は $2^{2/3}+2^{1/3}\approx 2.847322$ であり、$2.847322^3-6(2.847322)\approx 23.083930-17.083932\approx 6.0000$ となる。

- 3 つの解の和は 0 になるはずである（x^2 の項がないため）。実際 $(u+v)-(u+v)=0$ である。解の積は 6 になるはずであり、実際 $r(u^2-uv+v^2)=u^3+v^3=4+2=6$ である。
- $c^2=b^3$ ならば $u=\sqrt{b}=b/u$ となり、2 つの複素数解はどちらも $-\sqrt{b}$、すなわち重解になる。このことは $x^3-3bx-2b^{3/2}=(x-2\sqrt{b})(x+\sqrt{b})^2$ からも確かめられる。

よくある間違い

- $\cosh T \geq 1$ であることを忘れること。双曲線関数による議論がそのまま使えるのは $c>0$ の場合だけであり、$c<0$ の場合には置き換え $x\to -x$ が必要である。
- 複素数解を $\omega u+\omega\frac{b}{u}$ と書いてしまうこと。2 つの 3 乗根の積は b に等しいままでなければならないので、ω の累乗どうしの積は 1 でなければならない。

STEP のその先へ

これは 3 次方程式に対するカルダノ（Cardano）の公式であり、u^3 が 2 次方程式の解であるような $u+b/u$ という形こそ、16 世紀に最初にこの公式が発見されたときの形である。$c^2<b^3$ のときは、3 つの解がすべて実数であるにもかかわらず平方根の中が負になり（「還元不能の場合」（irreducible case））、そこでは三角関数による形 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ がその役割を引き継ぐ。一般の 5 次方程式に対してこの種の公式が存在しない理由を明らかにするのがガロア理論（Galois theory）であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）はその入り口として好適である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。