解答例

STEP III 2005、第 5 問

純粋数学 ・ 放物線の共通接線

> **STEP III 2005、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q5

鍵となる考え方

接線を接点で区別するのではなく、傾きで区別する。放物線には各傾き m の接線がちょうど 1 本ずつあり、最初の小問によってその y 切片（y-intercept）がわかる。2 つの放物線が傾き m の接線を共有するのは、これら 2 つの切片が一致するときであり、かつそのときに限る。したがって、共通接線（common tangent）の本数を数えることは、ただ 1 つの方程式の解 m の個数を数えることに帰着する。この方程式は、$a_1 \neq a_2$ のときは 2 次方程式、$a_1 = a_2$ のときは 1 次方程式である。

解答

傾き m の接線

$y = ax^2 + bx + c$ の傾きは $2ax + b$ である。$a \neq 0$ であるから、これが m に等しくなる点はちょうど 1 つ、$x_0 = \dfrac{m-b}{2a}$ であり、そのとき $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ である。この点における接線（tangent）は $y - y_0 = m(x - x_0)$、すなわち $y - mx = y_0 - mx_0$ である。$m = 2ax_0 + b$ を用いると、

$$\begin{aligned} y_0 - mx_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 \\ &= c - ax_0^2 = c - a \cdot \frac{(m-b)^2}{4a^2} = c - \frac{(m-b)^2}{4a}, \end{aligned}$$

となる。よって、P における接線は $y - mx = c - \dfrac{(m-b)^2}{4a}$ であり、示すべきことが示された。

共通接線をもつための条件

最初の小問より、各曲線には傾き m の接線がちょうど1本ずつあり、それらは

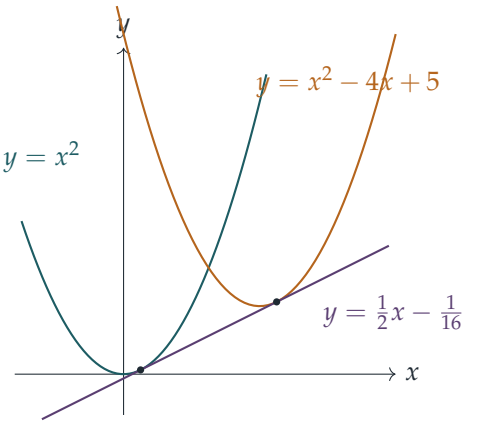
$$y = mx + k_1, \quad k_1 = c_1 - \frac{(m-b_1)^2}{4a_1}, \qquad \text{および} \qquad y = mx + k_2, \quad k_2 = c_2 - \frac{(m-b_2)^2}{4a_2}.$$

である。傾きの等しい2直線が一致するのは切片が等しいときであり、かつそのときに限るから、2曲線が傾き m の共通接線をもつための必要十分条件は $k_1 = k_2$ である。$4a_1a_2 \neq 0$ を掛けると（方程式が成り立つかどうかは変わらない）、

$$\begin{aligned} 4a_1a_2(k_2 - k_1) &= 4a_1a_2(c_2 - c_1) - a_1(m-b_2)^2 + a_2(m-b_1)^2 \\ &= (a_2 - a_1)m^2 + 2(a_1b_2 - a_2b_1)m + 4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2. \end{aligned}$$

となる。したがって、傾き m の共通接線が存在するための必要十分条件はこの式が0になることであり、これが求める条件である。この条件の左辺を $Q(m)$ とおく。

$Q(m) = 0$ の各解 m はちょうど1本の共通接線を与え、異なる解は異なる直線を与える（傾きが異なるからである）。よって、**共通接線の本数は $Q(m) = 0$ の相異なる実数解の個数に等しい**。また、どちらの曲線も鉛直な接線をもたないので、共通接線が鉛直になることはないことにも注意しておく。



$a_1 = a_2$ かつ $b_1 \neq b_2$ である2つの放物線は、共通接線をちょうど1本もつ。この図ではその傾きは $\frac{1}{2}$ である。

$a_1 \neq a_2$ の場合

このとき Q は m についての真の2次式であるから、相異なる実数解がちょうど1つであるための必要十分条件は、判別式（discriminant）が0であることである。判別式は

$$\Delta = 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2).$$

である。c を含まない項はきれいに整理できる：

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)^2-(a_2-a_1)(a_2b_1^2-a_1b_2^2)\\&=(a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2)-(a_2^2b_1^2-a_1a_2b_2^2-a_1a_2b_1^2+a_1^2b_2^2)\\&=a_1a_2(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2)=a_1a_2(b_1-b_2)^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\Delta=4a_1a_2\Big[(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)\Big],$$

であり、$a_1a_2\neq0$ であるから、共通接線がちょうど 1 本であるための必要十分条件は

$$(b_1-b_2)^2=4(a_1-a_2)(c_1-c_2). \qquad (*)$$

である。

考えてみよう 2 曲線が**接する**とは正確にはどういうことか。また、それをどのように方程式に置き換えられるか。

2 曲線が接するとは、ある点で交わり、かつその点で傾きが等しいことである。2 つの 2 次式の差を

$$d(x)=(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+(c_1-c_2),$$

とおく。2 曲線が x_0 で交わるのは $d(x_0)=0$ のときであり、そこで傾きが等しいのは $d'(x_0)=0$ のときである。よって、2 曲線が接するための必要十分条件は、d が $d'(x_0)=0$ を満たす解 x_0、すなわち重解 (repeated root) をもつことである。$a_1\neq a_2$ であるから d は 2 次式であり、d が重解をもつのは判別式 $(b_1-b_2)^2-4(a_1-a_2)(c_1-c_2)$ が 0 のときであり、かつそのときに限る。これはまさに条件 $(*)$ である。

以上より、$a_1\neq a_2$ のとき、2 曲線が共通接線をちょうど 1 本もつことと $(*)$ が成り立つことは同値であり、さらにそれは 2 曲線が接することと同値である。　（このとき、ただ 1 本の共通接線は当然ながら接点における接線である。）

$a_1=a_2$ の場合

共通の値を a と書く。Q の m^2 の項は消え、$a\neq0$ で割ると、条件は

$$2(b_2-b_1)m+4a(c_2-c_1)+(b_1-b_2)(b_1+b_2)=0.$$

となる。

- $b_1\neq b_2$ ならば、この 1 次方程式はただ 1 つの解

$$m=\frac{b_1+b_2}{2}-\frac{2a(c_2-c_1)}{b_2-b_1},$$

をもつので、共通接線はちょうど 1 本である。

- $b_1 = b_2$ ならば、条件は $4a(c_2 - c_1) = 0$ に帰着する。$c_1 \neq c_2$ ならば共通接線は1本も存在しない（一方の曲線は他方を鉛直方向に平行移動したものであり、各傾きの接線は平行で互いに異なる）。$c_1 = c_2$ ならば2曲線は一致し、すべての接線が共通接線となるので、共通接線は無数に存在する。

よって、$a_1 = a_2$ のとき、2曲線が共通接線をちょうど1本もつための必要十分条件は $b_1 \neq b_2$ である。

検算

$y = x^2$ と $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ については、差が $2(x - \frac{1}{2})^2$ であるから、2曲線は $x = \frac{1}{2}$ で接する。このとき $Q(m) = -2m^2 + 4m - 2 = -2(m-1)^2$ であり、ただ1つの解 $m = 1$ は $y = x^2$ の $x = \frac{1}{2}$ における傾きに一致する。図示した $y = x^2$ と $y = x^2 - 4x + 5$ の組については、公式から $m = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ が得られ、2本の接線の切片はいずれも $-\frac{1}{16}$ となる。さらに、恒等式 $Q(m) = 4a_1a_2(k_2 - k_1)$ と判別式の整理についても、数千組の無作為な係数に対して厳密な計算で確かめた。

よくある間違い

- $Q = 0$ が重解をもつことが2曲線が接することを「意味する」と、理由を説明せずに主張してしまう。両者のつながりは**別の**2次式 $d(x)$ を経由しており、それらを結びつけるのが判別式についての恒等式である。
- $a_1 = a_2$ の場合に、$b_1 = b_2$、$c_1 = c_2$ という場合分け（2曲線が一致し、共通接線が無数に存在する）を忘れたり、答えを「$b_1 \neq b_2$ または $c_1 \neq c_2$」としてしまったりする。

STEP のその先へ

曲線を点の集まりとしてではなく接線の族として記述するという考え方は、射影幾何学における**双対性**（duality）の考え方である。2次曲線の接線 $y = mx + k$ は m と k の間にそれ自身の2次の関係式を満たし、一般の位置にある2つの2次曲線は、4点で交わるのとちょうど同じように、4本の共通接線をもつ。軸が鉛直な2つの放物線では、無限遠直線が両方に接し、4本のうち2本分を占めてしまう。通常の共通接線が高々2本しか残らないのはこのためである。この種の問題をさらに解いてみたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦してみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。