解答例

STEP III 2005、第 4 問

純粋数学 • 非線形漸化式

STEP III 2005、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q4

鍵となる考え方

この漸化式（recurrence）は線形（linear）ではないが、本質的には連続する項の比（ratio）についての式である。$u_{n+1} = \rho\, u_n$ と書くと、漸化式は次の比が $k - \rho$ であることを述べている。したがって比は和が k である二つの値の間を行き来し、それ以外のことはすべてここから導かれる。三つの特別な場合は、この二つの比に関する条件となる。

解答

帰納法による証明

$r = \frac{b}{a}$ とおく。漸化式の両辺を（それが零でないとき）u_{n+1} で割ると

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = k - \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

となるので、連続する項の比はそれぞれ、k から直前の比を引いたものである。最初の比は $u_2/u_1 = r$ であるから、次の比は

$$c = k - \frac{b}{a} = \frac{ka - b}{a}.$$

となるはずである。$b \neq ka$ であるから $c \neq 0$ であることに注意する。また $b \neq 0$ であるから $r \neq 0$ である。これらを合わせると、すべての項が零でないことが保たれ、零で割ることは決して起こらない。

$P(n)$ を「$u_{2n-1} \neq 0$ かつ $u_{2n} = r\, u_{2n-1}$」という命題とする。$u_1 = a \neq 0$ かつ $u_2 = b = ra$ であるから、$P(1)$ は成り立つ。

ある $n \geq 1$ に対して $P(n)$ が成り立つと仮定する。このとき $u_{2n} = ru_{2n-1} \neq 0$ であり、漸化式より

$$u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}(ku_{2n-1} - u_{2n}) = r\,(k-r)\,u_{2n-1} = (k-r)\,u_{2n} = c\,u_{2n},$$

が得られる。これが求める二つ目の関係式である。よって $u_{2n+1} \neq 0$ であり、

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}(ku_{2n} - u_{2n+1}) = c\,(k-c)\,u_{2n} = (k-c)\,u_{2n+1} = r\,u_{2n+1},$$

となる。ここで $k - c = r$ を用いた。これは $P(n+1)$ にほかならない。数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ に対して

$$u_{2n} = \frac{b}{a}\,u_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = c\,u_{2n}, \qquad c = k - \frac{b}{a}.$$

が成り立つ。

考えてみよう なぜ帰納法の命題に「$u_{2n-1} \neq 0$」を含めるのだろうか。

漸化式は u_n で割っているので、どの項も零でない場合にしか数列は意味をもたない。零でないことを帰納法の中で一緒に運んでいくことで、公式を証明するのと同時に、各項が定義されることも証明できる。条件 $b \neq 0$ と $b \neq ka$ の両方が使われるのはここである。

一般項

二つ進むと c を掛け、次に $\frac{b}{a}$ を掛けることになるので、$u_{2n+1} = \frac{bc}{a}\,u_{2n-1}$ である。奇数番目の項は初項 a、公比（common ratio）$\frac{bc}{a}$ の等比数列（geometric progression）をなし、偶数番目の各項はその直前の奇数番目の項の $\frac{b}{a}$ 倍である。したがって一般項（closed form）は

$$u_{2n-1} = a\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}, \qquad u_{2n} = b\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^n c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

である。

小問 (i)

連続する項の比は $\frac{b}{a}, c, \frac{b}{a}, c, \ldots$ と交互に現れるので、数列が等比数列となるのは $c = \frac{b}{a}$、すなわち $k - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$ka = 2b.$$

である。このとき公比は $\frac{b}{a}$ である。$b \neq 0$ のとき $ka = 2b \neq b$ であるから、これは $b \neq ka$ と矛盾しない。

小問 (ii)

一般項より、すべての n に対して $u_{n+2} = \frac{bc}{a}\, u_n$ である。よって、すべての n に対して $u_{n+2} = u_n$ となるのは $\frac{bc}{a} = 1$、すなわち $b(ka - b) = a^2$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$kab = a^2 + b^2.$$

である。このとき数列は $a, b, a, b, \ldots$ となる。周期（period）がちょうど 2 であること（定数列でないこと）を求めるなら、さらに $a \neq b$ が必要である。$a = b$ ならば条件は $k = 2$ となり、すべての項が a に等しくなる。

小問 (iii)

同様に $u_{n+4} = (\frac{bc}{a})^2 u_n$ であるから、すべての n に対して $u_{n+4} = u_n$ となるのは $(\frac{bc}{a})^2 = 1$、すなわち $\frac{bc}{a} = \pm 1$ のとき、かつそのときに限る。値 $+1$ は小問 (ii) の場合であり、周期は 2（または 1）である。周期がちょうど 4 となるには $\frac{bc}{a} = -1$、すなわち $b(ka - b) = -a^2$ が必要である。すなわち

$$kab = b^2 - a^2.$$

である。このとき数列は a, b, $-a$, $-b$, a, b, $\ldots$ となる。$a \neq 0$ であるから $-a \neq a$ であり、したがって周期は確かに 4 であって、それより短くはない。

(ii) と (iii) のいずれにおいても、条件 $b \neq ka$ は自動的に成り立つ。どちらの条件に $b = ka$ を代入しても $a^2 = 0$ となり、これはあり得ないからである。

検算

$a = 1$、$b = 2$ として試してみる。$k = 4$（小問 (i)）のとき、漸化式からは $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ が得られる。$k = \frac{5}{2}$（小問 (ii)）のときは $1, 2, 1, 2, \ldots$ が得られる。$k = \frac{3}{2}$（小問 (iii)）のときは $1, 2, -1, -2, 1, 2, \ldots$ が得られる。さらに、a、b、k をランダムに約 2000 通り選び、漸化式を有理数の厳密な演算で計算した。すべてが一般項と一致し、数列が等比数列、周期 2、周期 4 となるのは、上の条件が成り立つときちょうどそのときであった。

よくある間違い

- 漸化式が u_n で割っているのに、どの項も決して零にならない理由を述べ忘れる。
- (iii) の答えとして $\frac{bc}{a} = \pm 1$ を挙げてしまう。$+1$ の場合は周期が 2 である。
- (ii) で、$a = b$、$k = 2$ のとき定数列になることに気づかない。

STEP のその先へ

置き換え $\rho_n = u_{n+1}/u_n$ によって、この非線形の漸化式は一階の写像 $\rho \mapsto k - \rho$ に変わる。この写像は対合（involution）である。すなわち、二回適用すると元に戻る。比において周期が 2 になるのはこのためである。非線形の漸化式や微分方程式を簡単にするために変数変換（change of variables）を行うのは、大学一年で学ぶ標準的な手法であり、写像の周期軌道（periodic orbit）の研究は離散力学系（discrete dynamical systems）の出発点である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（『数学の発展的問題』）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。