解答例

# STEP III 2005、第 3 問

純粋数学 • 2 次関数の合成

> **STEP III 2005、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q3

## 鍵となる考え方

モニック（monic）な 2 次式を 2 つ合成（compose）すると、係数どうしが互いに結びついたモニックな 4 次式（quartic）が得られる。4 つのパラメータ $p, q, r, s$ から 4 つの係数 $a, b, c, d$ を作らなければならないが、$p$ と $s$ はそのうち 2 つの係数において $2s + p$ という組合せでしか現れないので、1 つの関係式が成り立たなければならない。2 つ目の形も、実は同じことを姿を変えて述べたものにすぎない。**外側の** 2 次式について平方完成（completing the square）を行うと、$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ は（平方） − （定数）の形になる。まさにこの形のおかげで、最後の 4 次方程式を 2 次方程式の解の公式（quadratic formula）だけで解くことができるのである。

## 解答

### 2 次式の合成

f の $x$ に $\mathrm{g}(x)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) &= (x^2 + rx + s)^2 + p(x^2 + rx + s) + q \\ &= x^4 + 2rx^3 + (r^2 + 2s + p)x^2 + r(2s + p)x + (s^2 + ps + q).\end{aligned}$$

よって、すべての $x$ に対して $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ が成り立つのは、ちょうど

$$a = 2r, \qquad b = r^2 + (2s + p), \qquad c = r(2s + p), \qquad d = s^2 + ps + q.$$

が成り立つときである。

**必要性（necessity）**。このような $p,q,r,s$ が存在するならば、$r=\frac{1}{2}a$ かつ $2s+p=b-r^2=b-\frac{1}{4}a^2$ であるから、

$$c=\tfrac{1}{2}a(b-\tfrac{1}{4}a^2),\qquad \text{すなわち}\qquad a^3-4ab+8c=0.$$

**十分性（sufficiency）**。逆に、$a^3-4ab+8c=0$ と仮定する。$r=\frac{1}{2}a$ とし、$s$ は任意に（たとえば $s=0$ と）とり、さらに $p=b-\frac{1}{4}a^2-2s$、$q=d-s^2-ps$ とおく。1番目、2番目、4番目の等式は作り方から成り立ち、3番目の等式は $c=\frac{1}{2}a(b-\frac{1}{4}a^2)$ となるが、これは条件を変形したものにほかならない。$q$ は定数項にしか現れないので、$d$ には何の制約も課されないことに注意しよう。

したがって、求める必要十分条件（necessary and sufficient condition）は

$$\boxed{a^3-4ab+8c=0}$$

である（$d$ は任意）。

### $(x^2+vx+w)^2-k$ の形

**考えてみよう** $\mathrm{g}^2+p\,\mathrm{g}+q$ のような和を、1つの平方から定数を引いた形に書き直すにはどうすればよいか？

$\mathrm{g}(x)$ を1つの変数とみなして、g について平方完成する：

$$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=(\mathrm{g}(x)+\tfrac{1}{2}p)^2+q-\tfrac{1}{4}p^2=(x^2+rx+s+\tfrac{1}{2}p)^2-(\tfrac{1}{4}p^2-q).$$

これで両方向を証明できる。

**条件が成り立つならば**、前半の結果から、4次式が $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ に等しくなるような $p,q,r,s$ が存在し、上の式から、それは

$$v=r,\qquad w=s+\tfrac{1}{2}p,\qquad k=\tfrac{1}{4}p^2-q.$$

として $(x^2+vx+w)^2-k$ に等しい。

**逆に**、$(x^2+vx+w)^2-k$ はそれ自体、$\mathrm{g}(x)=x^2+vx+w$、$\mathrm{f}(x)=x^2-k$（すなわち $p=0$、$q=-k$、$r=v$、$s=w$）とした $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ である。よって前半の必要性の議論により、条件 $a^3-4ab+8c=0$ が成り立たなければならない。

以上で「必要十分（if and only if）」の証明が完了する。実際に使う際には値を具体的に求めておくと便利である。展開すると

$$(x^2+vx+w)^2-k=x^4+2vx^3+(v^2+2w)x^2+2vw\,x+(w^2-k),$$

であるから、

$$v=\tfrac{1}{2}a,\qquad w=\tfrac{1}{2}(b-\tfrac{1}{4}a^2)=\tfrac{1}{8}(4b-a^2),\qquad k=w^2-d,$$

とすればよく、このとき $x$ の係数は $2vw = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$ となり、これが $c$ に等しくなるのはちょうど条件が成り立つときである。

### 4 次方程式を解く

ここでは $a = -4$、$b = 10$、$c = -12$、$d = 4$ であり、

$$a^3 - 4ab + 8c = -64 + 160 - 96 = 0,$$

であるから、この方法が使える。公式から

$$v = -2, \qquad w = \tfrac{1}{8}(40 - 16) = 3, \qquad k = 3^2 - 4 = 5,$$

が得られ、実際 $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$ である（念のため一度展開して確かめる価値がある）。方程式は

$$(x^2 - 2x + 3)^2 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 = \sqrt{5} \text{ または } x^2 - 2x + 3 = -\sqrt{5}.$$

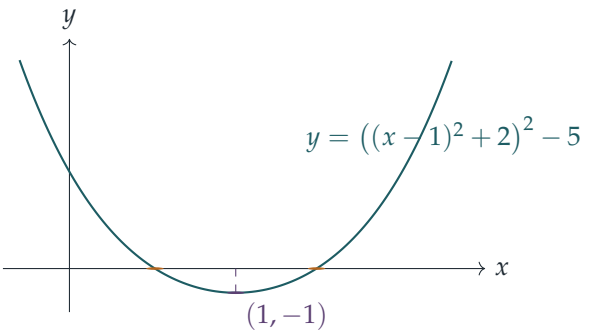
となる。$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ と書くと：

- $(x - 1)^2 = \sqrt{5} - 2$。$\sqrt{5} > 2$ であるから右辺は正であり、2 つの実数解（real roots）$x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ が得られる。
- $(x - 1)^2 = -2 - \sqrt{5} < 0$ であり、共役な複素数解の組（complex pair）$x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ が得られる。

よって解は

$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}, \qquad x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$

であり、実数であるのは最初の組だけである（問題が実数解を求めていると読むならば、この 2 つが答えである）。




グラフは $x = 1$ に関して対称であり（$(x - 1)^2$ のみに依存するため）、$x = 1$ で最小値 $2^2 - 5 = -1$ をとるので、軸とちょうど 2 回交わる。

## 検算

- 数値的には $1 \pm \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 1.4859$ および $0.5141$ であり、いずれを $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$ に代入しても $10^{-14}$ の誤差の範囲で 0 になる。$1 \pm 2.0582\,\mathrm{i}$ についても同様である。
- 解の和：4 つの解の和は $4 = -a$ となり、当然そうなるべき値になっている。
- 自分で合成を作って試してみよう。たとえば $\mathrm{f}(x) = x^2 + x$、$\mathrm{g}(x) = x^2 + 2x$ とすると $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$ が得られ、$a^3 - 4ab + 8c = 64 - 80 + 16 = 0$ となる。

## よくある間違い

- $d$ に関する条件を含めてしまうこと。定数項は $q$（または $k$）を使って常に合わせられるので、$d$ は自由である。
- 「必要十分」の一方向しか証明しないこと。$(x^2 + vx + w)^2 - k$ がそれ自体 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ の形であることに気づけば、逆は 1 行で示せる。
- 実数解を求めたところで止めてしまい、もう一方の因数から共役な複素数解の組が得られることに気づかないこと。

## STEP のその先へ

条件 $a^3 - 4ab + 8c = 0$ にはすっきりした意味がある。$x = y - \frac{1}{4}a$ と置換すると 3 次の項が消えるが、この条件は、そうして得られる **3 次の項を消去した** 4 次式（depressed quartic）に $y$ の項がないこと、つまりそれが $y^2$ の 2 次式であることをちょうど意味している。これはフェラーリ（Ferrari）による 4 次方程式の一般解法の出発点であり、より広くは、多項式がいつ合成として分解できるかという問題の出発点でもある。この問題はガロア理論（Galois theory）へとつながっていく。どのような多項式方程式が冪根によって解ける（solvable by radicals）のか、その背後にある代数を知るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。