解答例

STEP III 2005、第 2 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

STEP III 2005、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q2

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）は変数分離形（separable）であり、積分すると対数が現れ、それらをまとめると与えられた形になる。距離の問題では、距離そのものではなく距離の 2 乗 $D = x^2 + y^2$ を最小化すれば、平方根を扱わずに済む。曲線上では y^2 が x の関数として明示的に表されるので、D は x だけの関数となり、その導関数（derivative）はきれいに因数分解できる。どの停留点（stationary point）が現れるかは、c と a^2 の大小関係によって決まる。

解答

一般解

（$y \neq 0$ のとき）変数を分離すると、

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + k,$$

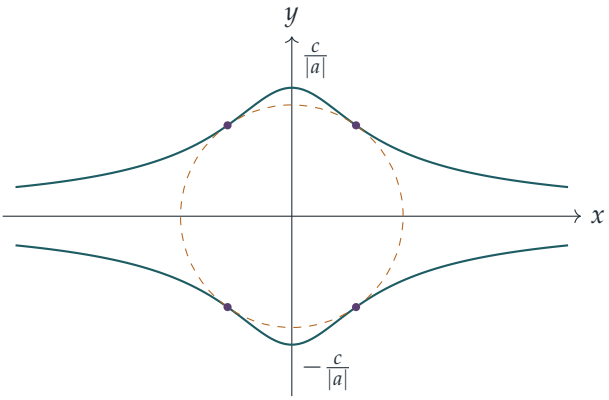
となる。ここで k は定数である。$a \neq 0$ より、すべての x に対して $x^2 + a^2 > 0$ であるから、右辺の対数はいたるところで定義されることに注意する。両辺を 2 倍して指数をとると、

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{x^2+a^2}, \qquad \text{よって} \qquad y^2(x^2+a^2) = c^2,$$

となる。ただし $c^2 = \mathrm{e}^{2k}$ である。y で割ったときに失われた解 $y = 0$ は $c = 0$ の場合にあたるので、c は確かに任意定数である。明示的に書けば、一般解（general solution）は $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$ であり、c の符号はどちらでもよい。曲線の方程式には c^2 しか現れないので、以下では $c > 0$ とする。

曲線の概形

曲線 $y^2(x^2+a^2)=c^2$ は2つの枝（branch）$y=\pm c/\sqrt{x^2+a^2}$ からなる。この曲線は両方の座標軸に関して対称であり（x^2 と y^2 しか現れないため）、x 軸とは決して交わらない。上側の枝では、x^2+a^2 が最小のとき y は最大となり、$x=0$ で最大値 $c/|a|$ をとる。$|x|\to\infty$ のとき $y\approx\pm c/|x|\to 0$ であるから、x 軸は漸近線（asymptote）である。図は $a=1$、$c=2$ の場合を、小問 (ii) で求める円とともに示したものである。



x^2+y^2 の導関数

$D=x^2+y^2$ とおく。微分方程式を用い、さらに $y^2=c^2/(x^2+a^2)$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x-\frac{2xy^2}{x^2+a^2}=2x\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right).$$

これは y^2 しか含まないので、どちらの枝でも成り立つ。積の微分法（product rule）を用いてもう一度微分し、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+a^2)^{-2}=-4x(x^2+a^2)^{-3}$ を使うと、

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+2x\cdot\frac{4c^2x}{(x^2+a^2)^3}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+\frac{8c^2x^2}{(x^2+a^2)^3},$$

となり、示すべき式が得られる。

D の停留点は、$x=0$ または $(x^2+a^2)^2=c^2$ となる点である。$x^2+a^2>0$ かつ $c>0$ であるから、2つ目の条件は $x^2+a^2=c$、すなわち $x^2=c-a^2$ を意味する。

小問 (i)

$0<c<a^2$ とする。すべての x に対して $x^2+a^2\geq a^2>c$ であるから $(x^2+a^2)^2>c^2$ となり、$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ の括弧の中は正である。したがって $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ は x と同符号であり、D は $x<0$ で減少し、$x>0$ で増加する。よって D は $x=0$ で**大域的な**最小値（global

minimum）をとり、それ以外の点では最小とならない。（実際、そこでの第 2 次導関数（second derivative）は $2(1-c^2/a^4) > 0$ であり、これと矛盾しない。）

$x = 0$ では $y^2 = c^2/a^2$ であるから、最も近い点は

$$\left(0,\, \pm\frac{c}{a}\right),$$

であり、原点からの距離は $c/|a|$ である。これが求める結果である。

小問 (ii)

次に $c > a^2$ とする。停留点は $x = 0$ と $x = \pm\sqrt{c-a^2}$ の 3 つである。

考えてみよう $x = 0$ は依然として最も近い点だろうか？

そうではない。$x = 0$ における第 2 次導関数は $2(1-c^2/a^4)$ であり、$c > a^2 > 0$ より $c^2 > a^4$ となるので、これは負である。したがって $x = 0$ は今度は D の極**大**点（local maximum）となる。$x^2 = c - a^2$ では $x^2 + a^2 = c$ であるから括弧の中は 0 となり、

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = \frac{8c^2(c-a^2)}{c^3} = \frac{8(c-a^2)}{c} > 0,$$

となって、極小（local minimum）を与える。これらが大域的な最小であることを確かめるために、$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ の符号を調べる。$x > 0$ のとき、括弧の中は $x^2 < c - a^2$ で負、$x^2 > c - a^2$ で正であるから、$x \geq 0$ の範囲で関数 D は $x = \sqrt{c-a^2}$ まで減少し、その後は増加する。よって $x \geq 0$ において D は $x = \sqrt{c-a^2}$ で最小となり、対称性から $x \leq 0$ においては $x = -\sqrt{c-a^2}$ で最小となる。

これらの点では $y^2 = c^2/(x^2+a^2) = c^2/c = c$ である。したがって、曲線上で原点に最も近い点は

$$\left(\pm\sqrt{c-a^2},\, \pm\sqrt{c}\right)$$

（符号の 4 通りの組合せすべて）の 4 点であり、原点からの距離は $\sqrt{2c-a^2}$ である。

確認として、$x = 0$ における距離の 2 乗は c^2/a^2 であり、

$$\frac{c^2}{a^2} - (2c - a^2) = \frac{(c-a^2)^2}{a^2} > 0,$$

であるから、y 軸上の点のほうが確かに遠い。

検算

- $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$ を微分方程式に代入すると成り立つ：$y' = -cx(x^2+a^2)^{-3/2} = -xy/(x^2+a^2)$。

- $a = 1$、$c = 2$ として $x^2 + 4/(x^2+1)$ をしらみつぶしに調べると、$x = \pm 1 = \pm\sqrt{c - a^2}$ で最小値 $3 = 2c - a^2$ をとり、そのとき $y^2 = 2 = c$ となる。これらが図の 4 つの点であり、そこで半径 $\sqrt{3}$ の破線の円が曲線に接している。
- $c = a^2$ のとき 2 つの答えは一致する：$\sqrt{c - a^2} = 0$ かつ $\sqrt{c} = c/|a| = |a|$ となり、4 つの点は $(0, \pm|a|)$ に合流する。

よくある間違い

- 「$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$ かつ $\mathrm{d}^2D/\mathrm{d}x^2 > 0$」から、その点で距離が**最小**になると結論してしまう。これからわかるのは極小であることだけであり、大域的な最小かどうかは $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$ の符号によって決まる。
- 下側の枝を忘れ、小問 (ii) で 4 点ではなく 2 点しか答えない。
- $x^2 + a^2 = \pm c$ と書いてしまう：$x^2 + a^2 > 0$ であるから、負の方はありえない。

STEP のその先へ

$y^2(x^2 + a^2) = c^2$ という条件のもとで $x^2 + y^2$ を最小化することは、条件付き最適化（constrained optimisation）の問題である。大学では、一方の変数について解くことなくこのような問題を扱うラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）を学ぶ。最も近い点では曲線の法線（normal）が動径の方向を向いており、それが破線の円が曲線に接する理由である。c が a^2 を超えるとき、$x = 0$ にあった 1 つの最小点が 2 つに分かれる様子は、**熊手型分岐**（pitchfork bifurcation）の簡単な例である。変数分離形の方程式とその解曲線についてさらに知りたければ、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。