解答例

STEP III 2005、第 13 問

確率・統計 ・ 幾何分布

STEP III 2005、問 13

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q13

鍵となる考え方

$w+1$ から n までのカードはまったく何の働きもしない。賞金も生まず、ゲームを終わらせることもない。したがって小問 (i) では、これらのカードを単に無視し、$0, 1, \ldots, w$ を示す引きだけに注目すればよい。そのような引きはそれぞれ、等確率の $w+1$ 個の数からの公平な選択であり、獲得総額は幾何分布に従う確率変数（geometric random variable）となる。小問 (ii) では引きがもはや独立（independent）ではないので、獲得総額を、賞金を生むカード 1 枚ごとに 1 つずつの指示変数（indicator）の和に分解し、期待値の線形性（linearity of expectation）を用いる。

解答

$0, 1, \ldots, w$ のいずれかを示す引きを**有効**な引き、$w+1, \ldots, n$ のいずれかを示す引きを**無効**な引きとよぶことにする。

小問 (i)

2 つの事象の確率が等しい理由。無効な引きは何も変えない。プレイヤーは何も受け取らず、ゲームはそのまま続く。したがってプレイヤーの獲得総額は有効な引きの列だけで決まる。すなわち、0 でない有効な引きはそれぞれ £1 をもたらし、0 を示す最初の有効な引きでゲームが終わる。よって、プレイヤーの獲得額がちょうど £3 となるのは、有効な引きのうち最初の 3 回が 0 でない数を示し、4 回目が 0 を示すときであり、かつそのときに限る。これらは同じ事象であるから、確率も等しい。

（各引きは独立に確率 $\frac{w+1}{n+1} > 0$ で有効となるので、確率 1 で有効な引きは無限回起こ

り、とくに 1 回目、2 回目、3 回目、4 回目の有効な引きが存在する。ゲームは確率 1 で終了する。）

考えてみよう それ以前に何が起こったかにかかわらず、各有効な引きが $0,1,\ldots,w$ のどれを示すのも等確率であるのはなぜか。

カードは毎回戻されるので、各引きは独立であり、それぞれ $\{0,1,\ldots,n\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う。ある引きが有効であるという条件のもとでは、その引きは $\{0,1,\ldots,w\}$ 上で一様である。これらの $w+1$ 通りの結果はもともと等確率だったからである。引きが独立であることから、連続する有効な引きの値も互いに独立である。したがって各有効な引きは、他の引きとは独立に、確率 $\frac{1}{w+1}$ で 0 となり、確率 $\frac{w}{w+1}$ で 0 でない値となる。

よって

$$P(\text{獲得額がちょうど£3}) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{w+1} = \frac{w^3}{(w+1)^4},$$

となり、示すべきことが得られた。

一般の r。3 を r に置き換えてまったく同じ議論をすれば（最初の r 回の有効な引きが 0 でなく、$(r+1)$ 回目が 0）、

$$P(\text{獲得額がちょうど£}r) = \frac{w^r}{(w+1)^{r+1}}, \qquad r = 0,1,2,\ldots$$

を得る。$q = \frac{w}{w+1}$ とおくと、これは $(1-q)q^r$ であり、幾何分布である。これらの確率の和は当然 1 となる。

獲得総額の期待値。獲得総額（ポンド単位）を X とする。$|q| < 1$ に対して $\sum_{r\geq 0} q^r = \frac{1}{1-q}$ を微分し q を掛けると、$\sum_{r\geq 0} rq^r = \frac{q}{(1-q)^2}$ を得る。よって

$$E(X) = \sum_{r=0}^{\infty} r(1-q)q^r = (1-q)\cdot\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{w/(w+1)}{1/(w+1)} = w.$$

獲得総額の期待値は £w である。

小問 (ii)

今度はカードを戻さないので、このゲームは、カードの束を一様ランダムな順序にシャッフルし、0 が現れるまでカードを順にめくっていくことと同じである。プレイヤーは、この順序において 0 のカードより前に来るカード $1,\ldots,w$ の 1 枚ごとに £1 を受け取る（0 より前のカードはすべて引かれ、後のカードは 1 枚も引かれない）。

$k = 1,\ldots,w$ に対し、カード k がカード 0 より前に来るとき $I_k = 1$、そうでないとき $I_k = 0$ とする。獲得総額は $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_w$ である。

考えてみよう I_k は独立ではない。それは問題になるだろうか。

問題にならない。どのような従属関係があっても、和の期待値は期待値の和に等しい。したがって必要なのは $P(I_k = 1)$ だけである。一様ランダムな順序において、カード k と 0 の位置を入れ替える操作は、k が 0 より前にある順序と 0 が k より前にある順序との間の全単射（bijection）であるから、両者は等確率であり、$P(I_k = 1) = \frac{1}{2}$ となる。よって

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{w} E(I_k) = \sum_{k=1}^{w} \frac{1}{2} = \frac{w}{2},$$

となり、これは小問 (i) における獲得額の期待値 w のちょうど半分である。以上で示された。

検算

- $w = n$（0 でないカードがすべて賞金を生む）で戻さない場合、カード 0 の位置は $1, \ldots, n+1$ 上で一様であるから、その前にあるカードの枚数の平均は $\frac{n}{2}$ であり、$\frac{w}{2}$ と一致する。
- 戻す場合で $w = 1$ のとき、各有効な引きは 0 と 1 の間の公平なコイン投げであるから、$P(X = r) = 2^{-(r+1)}$ かつ $E(X) = 1$ であり、$w^r/(w+1)^{r+1}$ および $E(X) = w$ と一致する。
- $n = 5, w = 2$ で 2×10^5 回のゲームをシミュレーションしたところ、$\frac{8}{81} \approx 0.0988$ に対して $P(X = 3) \approx 0.0995$、2 に対して平均獲得額 1.995 を得た。小さな束（たとえば $n = 5, w = 3$）についてすべての順序を正確に数え上げると、戻さない場合の平均は $\frac{3}{2} = \frac{w}{2}$ となる。

よくある間違い

- 引きが 0 となる確率として $\frac{1}{n+1}$ を用いること。これは 1 回の引きあたりの確率であるが、その間に無効な引きが何回でも起こりうる。有効な引きで条件づけることで、すっきりした $\frac{1}{w+1}$ が得られるのである。
- $r = 0$ を忘れること。最初の有効な引きが 0 であることもあり、その場合は何も獲得できない。その確率は $\frac{1}{w+1}$ である。
- 小問 (ii) で獲得額の分布全体を求めようとすること。それは必要ない。指示変数と線形性を使えば 2 行で片づく。

STEP のその先へ

無効な引きを無視することは、**間引き**（thinning）、すなわち興味深いことが起こる時刻だけに注目して過程を見ることの一例である。この考え方は、マルコフ連鎖（Markov chain）における「ジャンプ連鎖」（jump chain）や、ポアソン過程（Poisson process）で再び登場する。個数を指示変数の和として表し、指示変数が従属していても期待値の線形性を用いることは、大学 1 年次の確率論と組合せ論で最も役に立つ技法の 1 つである。どちらの考え方も、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）や、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論：入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。