解答例

STEP III 2005、第 12 問

確率・統計 ・ 不偏推定量の結合

STEP III 2005、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s3-q12

鍵となる考え方

すべては、独立（independent）な確率変数（random variable）の線形結合（linear combination）に関する二つの事実に基づいている。期待値（expectation）は足し合わせることができ、分散（variance）は係数の 2 乗を掛けて足し合わせることができる。真のラップタイムが**どのような値であっても**期待値が正しい値になることを要求すると、係数を比較することになり、各条件は定数に関する方程式に変わる。こうして X はレースタイムの妥当な推定値となり、Y は二つの計時方法の食い違いから未知の σ を推定する手段となる。

解答

真のラップタイムを $\mu_1, \ldots, \mu_4$、真のレースタイムを $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ とする。

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

とおく。このとき $\mathrm{E}(S) = \mu_1 + \cdots + \mu_4 = \mu$ であり、$T_1, \ldots, T_4$ は独立である（計時係はそれぞれ独立である）から、$\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$ である。また $\mathrm{E}(T) = \mu$、$\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$ であり、S は他の 4 人の計時係のみに依存するので、T は S と独立である。

X を求める

$X = aT + bS$ に対して

$$\mathrm{E}(X) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu.$$

これは真のラップタイムがどのような値であっても μ に等しくなければならないので、特にある $\mu \neq 0$ についても成り立つ。よって

$$a + b = 1.$$

T と S の独立性より

$$\mathrm{Var}(X) = a^2\,\mathrm{Var}(T) + b^2\,\mathrm{Var}(S) = \sigma^2(a^2 + 4b^2) = \sigma^2(a^2 + 4(1-a)^2).$$

2 次式 $a^2 + 4(1-a)^2 = 5a^2 - 8a + 4$ は最高次の係数が正であるから、導関数 $10a - 8$ が 0 となる $a = \frac{4}{5}$ で最小となる（平方完成（completing the square）すると $5a^2 - 8a + 4 = 5(a - \frac{4}{5})^2 + \frac{4}{5}$ である）。したがって $a = \frac{4}{5}$、$b = \frac{1}{5}$ であり、

$$X = \tfrac{4}{5}T + \tfrac{1}{5}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2.$$

これは理にかなっている。T は S の 4 倍信頼できる（分散は $4\sigma^2$ に対して σ^2）ので、4 倍の重みが与えられるのである。

Y を求める

$Y = cT + dS$ に対して、$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}(Y))^2$ を用いると

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2(c^2 + 4d^2) + (c+d)^2\mu^2.$$

考えてみよう 真のラップタイムがどのような値であっても、これが σ^2 に等しくなるにはどうすればよいか？

定数 c、d は μ に依存してはならないが、μ は任意の正の数をとりうる。この式は $\sigma^2(c^2 + 4d^2)$ に μ^2 の定数倍を加えたものであるから、μ が変化しても σ^2 に等しいままであるためには、μ^2 の係数が 0 でなければならない。すなわち $(c+d)^2 = 0$ であり、$d = -c$ となる。このとき $\sigma^2(c^2 + 4c^2) = \sigma^2$、すなわち $c^2 = \frac{1}{5}$ が必要である。$c = 1/\sqrt{5}$ をとると

$$Y = \frac{T - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{\sqrt{5}}$$

となる（逆の符号をとると $-Y$ が得られるが、問題になるのは Y^2 だけなので、これでも同様にうまくいく）。つまり Y は二つの計時の食い違いを測るものであり、その期待値は 0 で、その 2 乗は σ^2 の不偏推定量（unbiased estimator）である。

このレースの場合

$T = 220$、$S = 220.5$ のとき

$$X = \tfrac{4}{5}(220) + \tfrac{1}{5}(220.5) = 176 + 44.1 = 220.1,$$
$$Y = \frac{220 - 220.5}{\sqrt{5}} = -\frac{0.5}{\sqrt{5}}, \qquad Y^2 = \frac{0.25}{5} = 0.05.$$

よって $\sigma^2 \approx 0.05$ と推定され、したがって

$$\mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2 \approx \tfrac{4}{5}(0.05) = 0.04, \qquad \text{標準偏差：} X \approx 0.2 \text{ 秒.}$$

となる。ゆえに真のレースタイムの推定値は 220.1 ± 0.2 秒である。すなわち、両側に標準偏差（standard deviation）1 つ分をとると、真のタイムはおおよそ区間

$$[219.9,\ 220.3] \text{ 秒,}$$

にある。より高い確信を得たければ、両側に標準偏差 2 つ分をとって $[219.7,\ 220.5]$ 秒とすればよい。誤差が正規分布（normal distribution）に従う場合、これはおよそ 95% 区間となる。ただし、σ^2 はただ一つの Y^2 の値から推定したものなので、区間の幅そのものも大まかな推定値にすぎないことに注意せよ。

検算

- $a = \frac{4}{5}$ のとき、$\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2$ は $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$ と $\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$ のどちらよりも小さい。これは二つの独立な測定を組み合わせることで達成されるべき結果である。
- $X = 220.1$ は二つの測定値の間にあり、より信頼できる方である $T = 220$ にずっと近い。
- 200 000 回のレース（$\sigma = 0.7$）のシミュレーションでは、X の平均は真のタイムとの差が 0.001 以内であり、$\mathrm{Var}(X) \approx 0.393$（理論値 $\frac{4}{5}(0.49) = 0.392$）、$Y^2$ の平均は 0.491（理論値 $\sigma^2 = 0.49$）であった。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(S) = \sigma^2$ や $16\sigma^2$ としてしまうこと。正しくは $4\sigma^2$ で、四つの独立な分散の和である。
- $\mathrm{E}(Y^2)$ における $(\mathrm{E}\,Y)^2$ の項を忘れること。この項こそが $d = -c$ を導くのである。
- $\frac{4}{5}$ 倍せずに、$Y^2 = 0.05$ をそのまま X の分散として用いること。

STEP のその先へ

X は二つの推定値の線形結合のうち、分散が最小となる不偏なものである。一般的な規則は、独立な各推定値にその分散の逆数で重みをつけることであり、これはメタ分析（meta-analysis）における逆分散重み付け（inverse-variance weighting）や、最小二乗法（least squares）に関するガウス＝マルコフの定理（Gauss–Markov theorem）の基

礎となっている。Y^2 は σ^2 の不偏推定量であり、除数を $n-1$ とする標本分散（sample variance）と同様である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は和の期待値と分散を丁寧に扱っており、推定量と信頼区間（confidence interval）については統計学の最初の講義で本格的に取り上げられる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。