解答例

STEP III 2005、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP III 2005、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q11

鍵となる考え方

軸と棒は固定された水平軸のまわりを回転する剛体（rigid body）をなすので、ただ一つの角 θ ですべてが記述でき、エネルギーを用いるのが自然である。ポテンシャルエネルギー（potential energy）は角が $\frac{2}{3}\pi$ ずつ異なる三つの余弦の和である。これらをまとめると $A\cos\theta + B\sin\theta$ という一つの式になり、これは姿を変えた一つの余弦波にほかならない。この形に書き直してしまえば、平衡点、その安定性、そして最高点を越えるのに必要なエネルギーはすべて読み取れる。

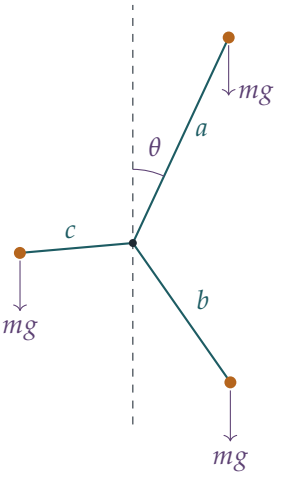
解答

エネルギー

各粒子は軽い剛体棒に取り付けられた質点とみなし、軸受けはなめらかでエネルギーは失われないとする。図のように、角はすべて鉛直上向きから時計回りに測る。すると長さ a, b, c の棒は鉛直上向きとそれぞれ $\theta, \theta + \frac{2}{3}\pi, \theta + \frac{4}{3}\pi$ の角をなすので、各粒子の軸からの高さは

$$a\cos\theta, \qquad b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \qquad c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

である。



$\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$、$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を用いると

$$\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \qquad \cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

軸の位置をポテンシャルエネルギーの基準にとると

$$\begin{aligned} V &= mg\left[a\cos\theta + b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) + c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] \\ &= mg\left[\tfrac{1}{2}(2a - b - c)\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

各粒子は角速度（angular velocity）$\dot\theta$ で軸のまわりの円周上を運動するので、速さはそれぞれ $a\dot\theta, b\dot\theta, c\dot\theta$ である。棒は軽いので、全エネルギーは

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\dot\theta^2 + \tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\cos\theta - \sqrt{3}\,(b - c)\sin\theta\right].$$

平衡

系が平衡（equilibrium）にあるのは $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ となるところ、すなわち

$$-\tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\sin\theta + \sqrt{3}\,(b - c)\cos\theta\right] = 0.$$

となるところである。$a > b$ かつ $a > c$ であるから $2a - b - c > 0$ である。よって平衡点では $\cos\theta \neq 0$ である。実際、$\cos\theta = 0$ ならば $\sin\theta = \pm 1$ であり、括弧内は $\pm(2a - b - c) \neq 0$ となってしまう。$\cos\theta$ で割ると

$$\tan\theta = -\frac{(b - c)\sqrt{3}}{2a - b - c},$$

となり、示すべき式が得られる。この議論は逆にもたどれる。すなわち、この方程式を満たす任意の θ は $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ を満たす。したがって平衡点はこの方程式の解とちょうど一致する。

平衡点はちょうど二つであり、どちらが安定か

正接関数は周期（period）π をもち、定義される長さ π の各区間で各実数値をちょうど一度ずつとる。よってこの方程式は $0 \le \theta < 2\pi$ にちょうど二つの解をもち、それらは π だけ異なる。これが二つの平衡位置である。

安定性を調べるため、V を一つの余弦で表す。

$$A = \tfrac{1}{2}(2a - b - c), \qquad B = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c),$$

とおくと $V = mg(A\cos\theta + B\sin\theta)$ である。このとき

$$\begin{aligned} 4(A^2 + B^2) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca \\ &= 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 4R^2, \end{aligned}$$

であるから $A^2 + B^2 = R^2$ であり、長さはすべて異なるので $R > 0$ である。$\cos\alpha = A/R$、$\sin\alpha = B/R$ となる α をとる。$A > 0$、$B < 0$ であるから $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$ である。すると

$$V = mgR\cos(\theta - \alpha).$$

二つの平衡点は、$V = mgR$ が最大となる $\theta = \alpha$ と、$V = -mgR$ が最小となる $\theta = \alpha + \pi$ である。

考えてみよう V が最小であることが、なぜ安定であることを意味するのか。

ここで $V''(\theta) = -mgR\cos(\theta - \alpha)$ である。$\theta = \alpha + \pi$ ではこれは $mgR > 0$ であり、わずかな変位によってポテンシャルエネルギーは増加する。全エネルギーが一定なので系は遠くまで離れることができず、この位置のまわりで振動する。$\theta = \alpha$ では $V'' = -mgR < 0$ である。わずかな変位によって V は減少し、運動エネルギー（kinetic energy）が増えて、系は離れていく。したがって安定（stable）な平衡点は $\theta = \alpha + \pi$、すなわち $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$ を満たし $\cos\theta < 0$ かつ $\sin\theta > 0$ となるほうである。この位置では最も長い棒 a は水平より下を向き、鉛直下向きと角 $|\alpha|$ をなす。もう一方の平衡点、すなわち $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ で棒 a が水平より上にあるほうは不安定である。

完全な回転

軸受けはなめらかで重力は保存力（conservative force）であるから、エネルギーは保存される。$I = m(a^2 + b^2 + c^2)$ とおくと

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta - \alpha) = E.$$

完全な回転をするには、系はすべての角を通過しなければならず、とくに V が最大値 mgR をとる $\theta = \alpha$ を越えなければならない。いたるところで $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \ge 0$ であるから、そ

のためには $E \geq mgR$ が必要である。$V = -mgR$ となる安定な位置 $\theta = \alpha + \pi$ を系が通過するときの角速度を ω とする。すると $E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgR$ であり、条件は

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - mgR \geq mgR \quad \Longleftrightarrow \quad \omega^2 \geq \frac{4mgR}{I} = \frac{4gR}{a^2+b^2+c^2}.$$

となる。よって系は少なくとも $\sqrt{4gR/(a^2+b^2+c^2)}$ の角速度で安定な平衡点を通過しなければならず、示すべきことが示された。

(等号が成り立つ境界の場合、系は不安定な平衡点へとゆっくり近づき、そこに達するのに無限の時間がかかる。厳密には、完全な一回転には ω がこの値より真に大きいことが必要である。ただし問題が求めているのは必要条件としての下限だけである。)

検算

- $a = b = c$ ならば $R = 0$ かつ $V \equiv 0$ である。三つの等しい質量はどの位置でもつり合い(重心(centre of mass)が軸上にある)、どんなにわずかな回転でも一周する。これは下限が 0 に近づくことと合致する。
- $b = c$ ならば、正接の条件から $\tan\theta = 0$ となる。対称性から、長い棒は真上(不安定)か真下(安定)を向く。
- 数値計算により、ランダムに選んだ長さについて、V の形、恒等式 $A^2 + B^2 = R^2$、そして平衡点がちょうど二つあり安定性が述べたとおりであることが確かめられる。$a = 3, b = 2, c = 0.5, g = 9.81$ のとき、臨界速度は $2.5406\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$ である。運動方程式(equation of motion)を数値的に追うと、この値より 2% 小さいと系は引き返し、2% 大きいと一周することがわかる。

よくある間違い

- 図とは逆向きに棒を $\theta - \frac{2}{3}\pi$ と $\theta + \frac{2}{3}\pi$ に置いてしまうと、$\sin\theta$ の項の符号が反転し、それに伴って正接の条件の符号も反転する。
- $\cos\theta = 0$ が平衡点になりえないこと、したがって $\cos\theta$ で割っても何も失われないことに触れずに「解は二つ」と結論してしまう。
- 運動エネルギーを $\frac{1}{2}m(a+b+c)^2\dot{\theta}^2$ などとしてしまう。各粒子はそれぞれ自分の速さ $r\dot{\theta}$ をもつので、慣性モーメント(moment of inertia)は $m(a^2+b^2+c^2)$ である。

STEP のその先へ

この系は複振り子（compound pendulum）、すなわち固定軸のまわりの剛体である。そのエネルギーは慣性モーメントと重心の位置だけで決まり、ここでは重心は軸から距離 $R/3$ のところにある。$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V(\theta) = E$ を $(\theta, \dot{\theta})$ 相平面（phase plane）上の曲線として捉え、セパラトリクス（separatrix）の内側では振動、外側では回転となるという描像は、大学 1 年の力学の中心的な考え方である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と、この種の問題に対するエネルギー法を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。