解答例

STEP III 2005、第 10 問

力学 ・ ゴムひもと摩擦

> **STEP III 2005、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q10

鍵となる考え方

すべては一つの変数、すなわち中心間の距離 d で決まる。ゴムバンドの長さは d によって定まるので、その張力（tension）と蓄えられるエネルギーは d の簡単な関数である。そこからエネルギー（弾性エネルギー（elastic energy）と摩擦（friction）がする仕事の比較）によって円板がどこで止まるかがわかり、さらにバンドの引く力と最大摩擦力（limiting friction）を比べることで、止まったまま静止し続けるかどうかがわかる。

解答

二つの円板は同一であり、バンドは軽い弾性体で接触はなめらかであり、円板が滑っている間は摩擦力の大きさが μmg であるとモデル化する。対称性より、二つの円板はつねに反対向きに等しい距離だけ動くので、バンドの直線部分は平行に保たれる。

d の関数としてのバンド。 中心間の距離が d のとき、バンドは各円板のちょうど半周に沿い、さらに長さ d の二本の直線部分に沿う。したがってバンドの長さは $2\pi r + 2d$ であり、伸び（extension）は $x = 2d$ である。フックの法則（Hooke's law）より、弾性率（modulus）$\lambda = \frac{\pi mg}{12}$、自然長（natural length）$2\pi r$ を用いて

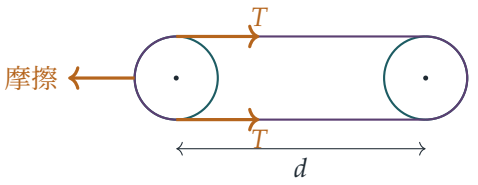
$$T = \frac{\lambda x}{2\pi r} = \frac{\pi mg}{12} \cdot \frac{2d}{2\pi r} = \frac{mg\,d}{12r}, \qquad E = \frac{\lambda x^2}{2 \cdot 2\pi r} = \frac{mg\,d^2}{12r}.$$

接触はなめらかなので、張力はバンド全体で等しい。各円板は二本の直線部分によって引かれ、それらはどちらも中心を結ぶ直線に平行で、もう一方の円板の方を向いて

いる。したがって各円板にはたらく引く力の合力（resultant）は

$$P = 2T = \frac{mg\,d}{6r}.$$

である。



図は上から見たもので、左側の円板がもう一方の円板に向かって滑っている間にはたらく水平方向の力を示している。重力と垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向で、互いに打ち消し合う。

放した瞬間は $d = 6r$ なので、$E_0 = 3mgr$、$P = mg$ である。接触するときは $d = 2r$ なので、$E = \frac{1}{3}mgr$ である。

円板が近づく間のエネルギー。 円板が $d = 6r$ から内側に動く間、それぞれは摩擦 μmg に逆らって距離 $\frac{1}{2}(6r - d)$ だけ動く。したがって摩擦に逆らってする仕事の合計は $\mu mg(6r - d)$ である。よって運動エネルギー（kinetic energy）の合計は

$$\begin{aligned} K(d) &= 3mgr - \frac{mg\,d^2}{12r} - \mu mg(6r - d) \\ &= mg\,(6r - d)\left(\frac{6r + d}{12r} - \mu\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $3r - \frac{d^2}{12r} = \frac{(6r-d)(6r+d)}{12r}$ を用いた。

小問 (i)

動き出す条件。 放した瞬間、各円板を引く力は $P = mg$ であり、摩擦は最大でも μmg しか与えられない。したがって円板が滑り始めるのは $mg > \mu mg$、すなわち $\mu < 1$ のとき、かつそのときに限る。

止まる条件。 $\mu < 1$ とする。$d < 6r$ において $K(d)$ が 0 になるのは $\frac{6r+d}{12r} = \mu$ のとき、すなわち

$$d^* = 12\mu r - 6r.$$

のときだけである。d が $6r$ から減少するとき、第二の因子 $\frac{6r+d}{12r} - \mu$ は $1 - \mu > 0$ から始まって減少するので、d が d^* に達するまで $K > 0$ である。円板が衝突する前に静止

するのは、接触する前に d^* に達するとき、すなわち $2r < d^* < 6r$ のとき、かつそのときに限る：

$$8r < 12\mu r < 12r \iff \tfrac{2}{3} < \mu < 1.$$

$\mu \le \frac{2}{3}$ ならば $K(2r) \ge 0$ であり、円板は先に互いに到達する（$\mu = \frac{2}{3}$ のときは速さ 0 でちょうど接するように到達するが、これは「衝突する前に」静止したことにはならない）。

考えてみよう 円板が d^* で止まったあと、バンドが再び円板を動かすことはないだろうか？

d^* において引く力は $P = \frac{mg\,d^*}{6r} = (2\mu - 1)mg$ である。$\mu < 1$ なのでこれは最大摩擦力 μmg より小さく、静止摩擦（static friction）が円板を支え、円板は静止したままである。二つの条件を合わせると、円板が滑り始め、かつ衝突する前に静止するための必要十分条件は $\frac{2}{3} < \mu < 1$ である。 ■

小問 (ii)

円板が少なくとも一回衝突するならば、近づくときの式が成り立ったまま、内向きに動きながら初めて $d = 2r$ に達しなければならない。したがって最初の衝突の直前の運動エネルギーの合計は

$$K(2r) = mg\,(4r)\left(\frac{8r}{12r} - \mu\right) = 4mgr\left(\tfrac{2}{3} - \mu\right) = \tfrac{4}{3}mgr(2 - 3\mu),$$

であり、題意が示された（これが正となるのはちょうど $\mu < \frac{2}{3}$ のときであり、小問 (i) と整合している）。

小問 (iii)

まず、$\mu^2 < \frac{4}{9}$ より $\mu < \frac{2}{3}$ なので、小問 (i), (ii) より円板は確かに衝突する。運動エネルギーの半分が失われるので、円板は運動エネルギーの合計

$$K_1 = \tfrac{2}{3}mgr(2 - 3\mu).$$

をもって $d = 2r$ から跳ね返る。

ここから円板は互いに離れていく。バンドの力も摩擦もともにもう一方の円板の方を向いてはたらくので、各円板は減速する。間隔が $2r$ から d まで増える間に、弾性エネルギーは $\frac{mg(d^2-4r^2)}{12r}$ だけ増加し、摩擦に逆らってする仕事は $\mu mg(d - 2r)$ であるから

$$K(d) = K_1 - \frac{mg(d^2 - 4r^2)}{12r} - \mu mg(d - 2r).$$

となる。これは d について狭義単調減少なので、ちょうど一度だけ 0 になり、そのときの間隔 d_1 で円板は静止する。$d_1 = 2r + u$ とおき、$\frac{12r}{mg}$ を掛けると

$$u^2 + 4r(1+3\mu)\,u - 8r^2(2-3\mu) = 0.$$

を得る。正の解をとり、判別式（discriminant）を $(1+3\mu)^2 + 2(2-3\mu) = 9\mu^2 + 5$ と整理すると

$$u = 2r\left(\sqrt{9\mu^2+5} - (1+3\mu)\right), \qquad d_1 = 2r\left(\sqrt{9\mu^2+5} - 3\mu\right).$$

となる（$2r < d_1 \le 6r$ であることが確かめられるので、バンドは張ったままであり、エネルギーの式はそのまま使える）。

考えてみよう 円板は d_1 で一瞬静止する。そこにとどまるかどうかを決めるのは何か？

バンドの引く力が最大摩擦力を超えなければ、円板は静止したままである：

$$\frac{mg\,d_1}{6r} \le \mu mg \iff \sqrt{9\mu^2+5} - 3\mu \le 3\mu \iff 9\mu^2 + 5 \le 36\mu^2 \iff \mu^2 \ge \tfrac{5}{27},$$

ここで両辺は正なので、2 乗してよい。したがって $\frac{5}{27} < \mu^2 < \frac{4}{9}$ ならば、円板は衝突して跳ね返り、単調に減速して d_1 で静止し、その後は静止摩擦によってずっとそこに保たれる。よって最初の衝突のあと、円板はちょうど一回だけ静止する。 ■

検算

- $\mu = \frac{2}{3}$ のとき、小問 (i) の停止位置 $d^* = 12\mu r - 6r$ も小問 (ii) の運動エネルギーも「速さ 0 で $d = 2r$ に到達する」ことを与えるので、二つの小問は境界で一致する。
- $\mu = 0.5$（小問 (iii) の範囲内）のとき：$K(2r) = \frac{2}{3}mgr$、$K_1 = \frac{1}{3}mgr$、$d_1 = 2r(\sqrt{7.25} - 1.5) \approx 2.385r$ である。そこでの引く力は $\approx 0.397mg < 0.5mg$ なので、円板はその場にとどまる。運動を一歩ずつ追う数値シミュレーションによってこれらすべてが再現され、さらにいくつかの $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$ について停止位置 $d^* = 12\mu r - 6r$ も再現された。$\mu^2 < \frac{5}{27}$（例えば $\mu = 0.42$）では、予測どおり、円板が止まったあとに再び動き出すことが示された。

よくある間違い

- 伸びを $2d$ ではなく d としてしまう：直線部分は二本とも伸びている。
- 各円板に張力を一本分しか用いない：バンドは各円板を**二本**の部分で引くので、$2T$ となる。

- 止まったあとに円板が静止し続けるかを確かめ忘れる。「速さが 0」であることと「ずっと静止している」ことは異なる条件である。

STEP のその先へ

摩擦があるため、この系は区分的（piecewise）な系になる。速度の符号が変わるたびに運動方程式が変わり、加えられた力が摩擦のしきい値を下回るところでは「張り付いた」状態が現れる。このような系（スティック・スリップ運動（stick–slip motion））は、大学 1 年の力学で相平面（phase-plane）の方法を用いて調べられる。μ が小さいときには、エネルギーを失いながら衝突を繰り返すことで、有限の時間内に無限回の跳ね返りが起こる。これは考えてみる価値がある。エネルギーを用いた方法と摩擦についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。