解答例

STEP III 2005、第 1 問

純粋数学 ・ 三角方程式とグラフ

> **STEP III 2005、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q1

鍵となる考え方

sin(何か) = cos(別の何か) という形の方程式はすべて、$\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$ を用いることで、二つの**引数**（argument）についての主張に書き換えられる。これを $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ に適用すると、$\sin x \mp \cos x$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍に等しくなければならないことになるが、$|\sin x \pm \cos x|$ の上界を調べると、この値は小さすぎてそこまで届かないことがわかる。グラフの概形は、内側の引数が短い区間の上しか動かないとき、外側の関数がそれに何をするかを考えれば得られる。

解答

方程式 $\sin A = \cos B$

$\cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B)$ であるから、$C = \frac{\pi}{2} - B$ として $\sin A = \sin C$ の一般解（general solution）を求めればよい。正弦関数は各周期（period）2π の中で $[-1, 1]$ の各値をちょうど 2 回、C と $\pi - C$ でとる（値が ± 1 のときはこの二つは一致する）。よって

$$\sin A = \sin C \iff A = C + 2k\pi \text{ または } A = \pi - C + 2k\pi \quad \text{ある整数} k.$$

$C = \frac{\pi}{2} - B$ を代入すると

$$A = \tfrac{\pi}{2} - B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} - B,$$
$$\text{または} \quad A = \pi - \tfrac{\pi}{2} + B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} + B.$$

したがって、$\sin A = \cos B$ となるのは、ある整数 n について $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B$ となるとき、かつそのときに限る。上の各段階はすべて「必要十分」であるから、

両方向が示されている。（「十分」の方向を直接確かめるなら、周期 2π を用いて $\sin((4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B) = \sin(\frac{\pi}{2} \pm B) = \cos B$ となる。）

上界と方程式 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

加法定理（compound angle formula）を用いると

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\tfrac{\pi}{4} \pm \cos x \sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin(x \pm \tfrac{\pi}{4}),$$

であり、任意の θ について $|\sin\theta| \le 1$ であるから、すべての x について $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

次に、ある x について $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ が成り立つと仮定する。最初の結果を $A = \sin x$、$B = \cos x$ として用いると、ある整数 n が存在して

$$\sin x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2} \pm \cos x, \qquad \text{すなわち} \qquad \sin x \mp \cos x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2}.$$

考えてみよう 右辺が小さくなりえないのはなぜか。

$4n+1$ は奇数なので決して 0 にならず、$|4n+1| \ge 1$ である。よって右辺の絶対値は少なくとも $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ である。一方、左辺の絶対値は高々 $\sqrt{2} \approx 1.414$ である。$\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから（両辺を 2 乗すると、$\pi^2 > 9 > 8$ より $2 < \frac{\pi^2}{4}$）、これは不可能である。ゆえに $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ は解をもたない。

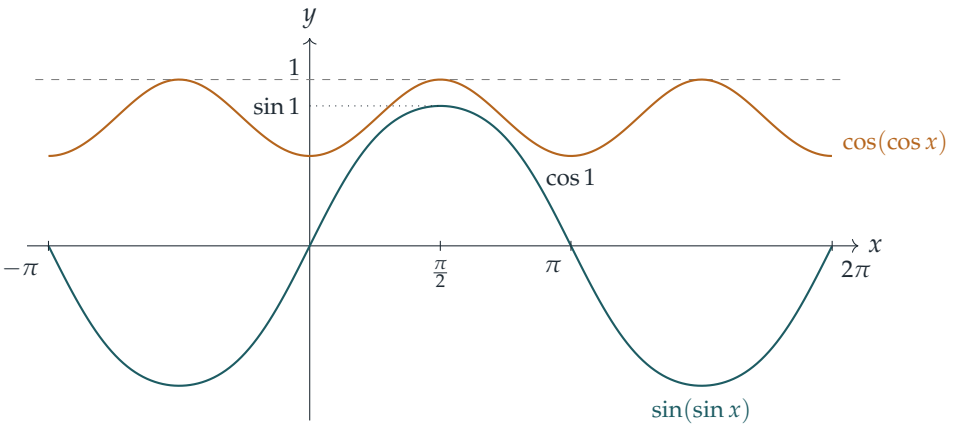
$y = \sin(\sin x)$ と $y = \cos(\cos x)$ のグラフ

$y = \sin(\sin x)$。内側の関数 $\sin x$ は $[-1, 1]$ 上を動き、その区間で sin は増加関数である（$[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ だからである）。よって $\sin(\sin x)$ は $\sin x$ が増加・減少するのとちょうど同じところで増加・減少する。すなわち、周期は 2π で、奇関数（odd function）であり、$x = n\pi$ で 0 となり、$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ で最大値 $\sin 1 \approx 0.841$、$x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ で最小値 $-\sin 1$ をとる。傾き（gradient）$\cos x \cos(\sin x)$ は原点で 1 に等しい。グラフは、少し平たくなった正弦曲線のように見える。

$y = \cos(\cos x)$。$\cos(-u) = \cos u$ かつ $\cos(x+\pi) = -\cos x$ であるから、$\cos(\cos(x+\pi)) = \cos(\cos x)$ となる。すなわちグラフは周期 π をもち、偶関数（even function）である。$[-1,1]$ 上で $\cos u$ は $u = 0$ で最大（$= 1$）、$u = \pm 1$ で最小（$= \cos 1 \approx 0.540$）となる。よって $\cos(\cos x)$ は $\cos x = 0$ となるところ、つまり $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ で極大値 1 をとり、$\cos x = \pm 1$ となるところ、つまり $x = n\pi$ で極小値 $\cos 1$ をとる。値はつねに 0.54 と 1 の間にある。

前の小問より二つの曲線は決して交わらない。さらに $\cos(\cos 0) = \cos 1 > 0 = \sin(\sin 0)$ であるから、連続性（continuity）により、余弦の曲線はいたるところで正弦

の曲線より真に上にある。二つの曲線が最も近づくのは $x \approx 0.88$ 付近（差は約 0.107）で、そこでは $\sin(\sin x)$ はほぼ頂点にあり、$\cos(\cos x)$ はまだ上昇中である。



$y = \sin(2\sin x)$ のグラフ

これもまた周期 2π の奇関数で、$x = n\pi$ に零点をもつ。よって $0 \le x \le \pi$ の範囲を理解すれば十分であり、この範囲でグラフは $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称である（$\sin(\pi - x) = \sin x$ だからである）。

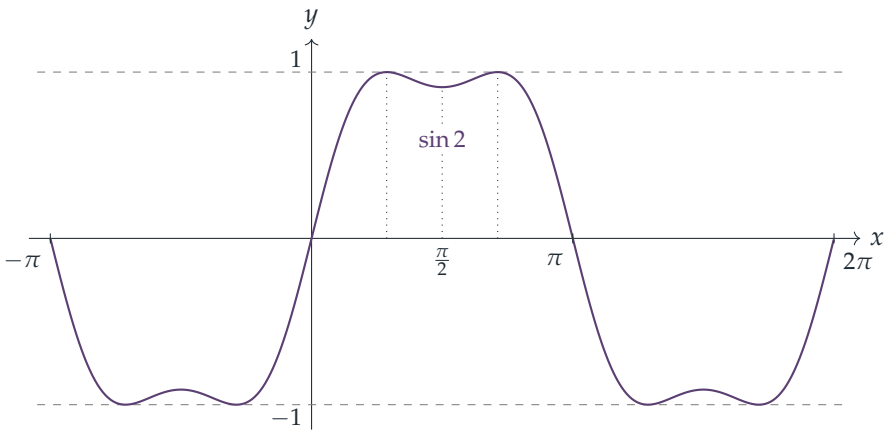
今度の違いは、この区間で内側の引数 $u = 2\sin x$ が $[0, 2]$ 上を動き、しかも $2 > \frac{\pi}{2}$ であることである。したがって、x が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで増加するとき、

- $\sin x$ が $\frac{\pi}{4}$ まで増加する間、すなわち $x = \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 0.903$ までに、u は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで増加する。その間に $y = \sin u$ は 0 から最大値 1 まで増加する。
- u はさらに $\frac{\pi}{2}$ から 2 まで進み、そこでは $\sin u$ は減少するので、y は $x = \frac{\pi}{2}$ で $\sin 2 \approx 0.909$ まで下がる。

対称性により、y は $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 2.238$ で再び 1 まで上がり、$x = \pi$ で 0 まで下がる。導関数（derivative）で確かめると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos x \cos(2\sin x),$$

となり、これが 0 になるのは $\cos x = 0$ のとき（$\frac{\pi}{2}$ における極小）か、$2\sin x = \pm\frac{\pi}{2}$ のとき（最大値 1）に限られる。原点での傾きは 2 である。$[\pi, 2\pi]$ では図が反転する。すなわち、最小値 -1 が二つあり、その間の $x = \frac{3\pi}{2}$ で極大値 $-\sin 2$ をとる。正弦曲線の各山が、浅いくぼみをもつラクダのこぶのような形に変わったのである。



検算

- $B = 0.3$、$n = 1$ とする。$A = \frac{5\pi}{2} - 0.3$ とすると $\sin A = \cos 0.3 \approx 0.9553$ となり、確かに成り立つ。
- 1 周期にわたる細かい格子点上で $\cos(\cos x) - \sin(\sin x)$ を計算すると、最小値は約 0.107（$x \approx 0.878$ 付近）で、決して 0 にならない。これにより、二つの曲線が交わらないことが確認できる。
- $\sin(2\sin x)$ について $[0, \pi]$ を数値的に調べると、停留点（turning point）はちょうど三つ見つかる。$x \approx 0.903$ と 2.238 における最大値 1、および $\frac{\pi}{2}$ における極小値 $\sin 2 \approx 0.909$ である。

よくある間違い

- $A = \frac{\pi}{2} - B + 2n\pi$ だけを書き、$\sin(\pi - C) = \sin C$ から生じるもう一つの解の族 $A = \frac{\pi}{2} + B + 2n\pi$ を忘れてしまう。
- $n = 0$ が許されることを忘れ、$|4n + 1| \geq 5$ の場合だけを調べてしまう。決定的なのは $\frac{\pi}{2}$ そのものとの比較である。
- $\sin(2\sin x)$ を高さ 1 の単なる正弦曲線として描いてしまう。$2 > \frac{\pi}{2}$ であるため、内側の引数が正弦の頂点を通り越し、それが $x = \frac{\pi}{2}$ でのくぼみを生む。

STEP のその先へ

ここでのグラフはすべて合成（composition）に関するものである。$f(g(x))$ の形は、g の値域が f のグラフのどの部分を覆うかによって決まる。この考えを繰り返す（$\sin(\sin(\sin x))$ など）と、不動点（fixed point）や反復写像の力学系（dynamics of iterated maps）へとつながる。そこでは、$f(f(\cdots f(x)))$ がいつ落ち着くのかが問われる。両辺がとりうる値の範囲を比較するという不等式の議論は、解析学（analysis）全体を通して用いられる手法の簡単な例である。そうした議論が厳密になされる様子を見るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。