解答例

STEP II 2005、第 9 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

> **STEP II 2005、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q9

鍵となる考え方

2 つの質点を別々に扱う。A には外から加える力がないので、A の運動方程式から、糸が与えるべき張力（tension）が決まる。自由度はすべて、B に加える力 P の**向き**にある。P を傾けると B にはたらく垂直抗力（normal reaction）が変わり、したがって B にはたらく摩擦力（friction）も変わる。P を斜面から離れる向きに傾けると、斜面に沿う成分の一部が無駄になるが、摩擦力が変化する。最適な傾きは、この 2 つの効果がつり合うところにある。結局、最大化すべき式は $a\cos\theta + b\sin\theta$ の形になる。

解答

A と B を質点（particle）とみなし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとして、ℓ に沿って張られているとする。P は ℓ を含む鉛直面内ではたらくとする。斜面を横切る向きの P の成分は何の役にも立たないからである。ここで

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

に注意する。したがって $\mu_B = \tan 30^\circ$ であり、B 単独ではちょうどすべり出す直前の状態にある。また $\mu_A = \frac{1}{2}\tan 30^\circ$ なので、A 単独ではすべってしまう。

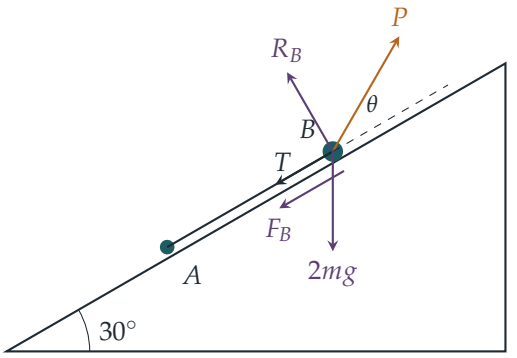
質点 A。斜面に垂直な方向に力を分解すると $R_A = mg\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ であるから、A にはたらく摩擦力の最大値は

$$\mu_A R_A = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{1}{4}mg.$$

である。重力の斜面下向きの成分は $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$ である。

質点 B。P が ℓ の上向きの方向となす角を、斜面から離れる向きに測って θ とする（θ

が負のときは、P が B を斜面に押しつけることを意味する)。張力を T とする。



図では、小問 (i) の場合と同じく、摩擦力 F_B が斜面下向きにはたらくように描いてある。斜面に垂直な方向について

$$R_B + P\sin\theta = 2mg\cos 30^\circ \quad \Longrightarrow \quad R_B = \sqrt{3}\,mg - P\sin\theta.$$

したがって、B にはたらきうる摩擦力の最大値は

$$\mu_B R_B = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,mg - P\sin\theta\right) = mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta.$$

である。B にはたらく重力の斜面下向きの成分は $2mg\sin 30^\circ = mg$ である。

小問 (i)

質点が ℓ に沿って上向きに動くためには、それぞれにはたらく摩擦力は斜面下向きである。P が最小のとき、両方の質点がちょうど動き出す直前にあるので、どちらの摩擦力も最大摩擦力（limiting friction）に達している。

A が上向きに動くには、糸が重力の成分と摩擦力に打ち勝たなければならない：

$$T = \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{3}{4}mg.$$

B については、斜面に沿う方向で、P の成分が T、重力の成分、最大摩擦力に打ち勝たなければならない：

$$P\cos\theta = \tfrac{3}{4}mg + mg + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right),$$

$$P\left(\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \tfrac{11}{4}mg.$$

考えてみよう P を斜面から離れる向きに傾けると、P の斜面に沿う成分は小さくなるのに、なぜそれが有利にはたらくのだろうか。

B をわずかに持ち上げると R_B が小さくなり、したがって P が打ち勝つべき摩擦力も小さくなる。小さな傾き θ に対して、$\cos\theta$ は $1-\frac{1}{2}\theta^2$ 程度しか減らないが、$\sin\theta$ は θ 程度で増える。そのため、はじめのうちは摩擦力が減る効果のほうが勝つ。最適な角を求めるために

$$\cos\theta+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\tfrac{1}{2}\sin\theta\right)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta-30^\circ).$$

と変形する。これは高々 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、等号が成り立つのは $\theta=30^\circ$ のときに限る。P にこの係数を掛けたものが $\frac{11}{4}mg$ に等しくなければならないので、P はこの係数が最大のとき最小になる：

$$P_{\min}=\tfrac{11}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg,$$

これが求める結果である。B が斜面から離れないことを確かめておく必要がある：

$$R_B=\sqrt{3}\,mg-\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{16}\sqrt{3}\,mg>0.$$

よって P は ℓ を含む鉛直面内で、ℓ に対して斜面から離れる側に 30° の向きにはたらく。すなわち、**水平から上向きに 60° の向き**に、斜面の上方へ引くようにはたらく（斜面となす最適な角が $\arctan\mu_B$、すなわち B に対する摩擦角（angle of friction）であることに注意しよう）。

小問 (ii)

今度は P は系が斜面をすべり落ちるのを止めればよいので、各質点にはたらく摩擦力は斜面上向きである。P がなければ、A は単独では静止していられない。重力の成分 $\frac{1}{2}mg$ が最大摩擦力 $\frac{1}{4}mg$ を上回るからである。したがって、糸が A を引き止めなければならない：

$$T\geq\tfrac{1}{2}mg-\tfrac{1}{4}mg=\tfrac{1}{4}mg.$$

特に、糸はたるまずに張っていなければならない。B がすべり落ちないためには、斜面上向きの力が T と重力の成分につり合えなければならない：

$$P\cos\theta+\left(mg-\tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right)\geq T+mg.$$

左辺は T によらないので、P が最小になるのは張力が最小の $T=\frac{1}{4}mg$ のときである。このとき

$$P\left(\cos\theta-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\geq\tfrac{1}{4}mg.$$

ここで $\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta+30^\circ)\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり、等号は $\theta=-30^\circ$ のとき成り立つ。今回の最適な向きは B を斜面に**押しつける**向きであり、これにより R_B が大きくなって、B を支える摩擦力も大きくなる。よって大きさの最小値は

$$P_{\min}=\tfrac{1}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,mg.$$

である。この力は ℓ の上向きの方向から下側に 30° の向きにはたらく。ℓ は 30° の傾きで上っているので、この向きは水平であり、B を斜面のほうへ水平に押す力である。この値のとき、A と B はともに極限つり合い（limiting equilibrium）の状態にあり、$T = \frac{1}{4}mg$ である。

検算

- $m = g = 1$ として数値的に確かめた。鉛直面内の P のあらゆる向きについて走査し、各向きに対する P の最小値を二分法（bisection）で求めた。(i) では最小値は $2.3816 \approx \frac{11}{8}\sqrt{3}$ で、斜面に対して 30.0° の向きであった。(ii) では $0.2165 \approx \frac{1}{8}\sqrt{3}$ で、-30.0°、すなわち水平の向きであった。また、(ii) の最小値において系全体のつり合いが実際に成り立つことも確認した。
- P が斜面に沿う場合（$\theta = 0$）の (i) の力の総計：$P = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mg + mg + mg = \frac{11}{4}mg \approx 2.75mg$ が必要である。これは $2.38mg$ より大きく、当然そうなるべき結果である。
- P が斜面に沿う場合の (ii) では、系に必要な力は $\frac{3}{2}mg - \frac{1}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg$ である。水平に押すほうが $\frac{\sqrt{3}}{8}mg \approx 0.217mg$ で済み、より効率がよい。

よくある間違い

- P が斜面に沿ってはたらくと思い込むこと。問題が求めているのは**大きさ**の最小値なので、向きは自由に選べる。
- $P\sin\theta$ が R_B を変え、したがって B にはたらく最大摩擦力も変えることを忘れること。
- (ii) で、(i) と同じ摩擦力の向きをそのまま使うこと。すべり落ちることが問題になる場合、摩擦力は斜面上向きにはたらく。

STEP のその先へ

2 つの小問はどちらも同じ原理に基づいている。摩擦に逆らう最も効率のよい力は、運動の方向と摩擦角 $\lambda = \arctan\mu$ をなす。(i) ではその力は斜面から離れる向きに傾き、(ii) では斜面に押しつける向きに傾く。これは、垂直抗力と最大摩擦力が合わさって、法線と角 λ をなす 1 つの「全抗力（total reaction）」になるからである。この全抗力で考えると、多くの摩擦の問題が力の三角形（triangle of forces）の幾何に帰着する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と束縛

運動を大学 1 年生のレベルで丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。