解答例

STEP II 2005、第 8 問

純粋数学 • 変数分離形の微分方程式

> **STEP II 2005、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q8

鍵となる考え方

この方程式は変数分離形（separable）である。y への依存はすべて 1 つの因子 y^2 にまとまっているので、それで割ると $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が得られ、これは $-1/y$ の導関数（derivative）である。x についての積分は置換（substitution）$u = 1 + x^2$ で計算できる。奇数乗 x^3 が、u に必要な $x\,\mathrm{d}x$ を供給してくれるからである。2 つ目の曲線については、右辺が z^3 であって y^2 ではないことに注意する。このとき注目すべき量は $1/z^2$ であり、これは $1/y$ とまったく同じ方程式を満たすことがわかる。

解答

y を求める

C 上では $y(0) = 1 > 0$ であり、$x \geq 0$ において方程式の右辺は決して負にならないので、y は決して減少しない。よって常に $y \geq 1$ であり、y^2 で割ってよい：

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

積分については $u = 1 + x^2$ とおく。すると $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ であり、$x^3\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(u-1)\,\mathrm{d}u$ となるので：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (u^{-3/2} - u^{-5/2})\,\mathrm{d}u = -u^{-1/2} + \tfrac{1}{3}u^{-3/2} + \text{定数} \\ &= -\frac{3u-1}{3u^{3/2}} + \text{定数} = -\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \text{定数}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + k$$

が、ある定数 k に対して成り立つ。$x = 0$ とおくと $1 = \frac{2}{3} + k$ となるので $k = \frac{1}{3}$ であり、求める結果が得られる：

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{3}.$$

x が大きいとき

支配的な冪をくくり出す。分子からは $3x^2$ を、$(1+x^2)^{3/2}$ からは x^3 をくくり出すと：

$$\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} = \frac{3x^2(1+\frac{2}{3x^2})}{3x^3(1+\frac{1}{x^2})^{3/2}} = \frac{1}{x}\Big(1+\frac{2}{3x^2}\Big)\Big(1-\frac{3}{2x^2}+\cdots\Big) = \frac{1}{x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big),$$

ここで二項展開（binomial expansion）を用いた。x が大きいとき $1/x^2 < 1$ なので、これは妥当である。よって

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}+\frac{1}{x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big) = \frac{1}{3}\Big(1+\frac{3}{x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big),$$

であり、$(1+t)^{-1} = 1-t+O(t^2)$ を用いて逆数をとると、

$$y = 3\Big(1-\frac{3}{x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) \approx 3-\frac{9}{x},$$

となり、題意が示された。

? **考えてみよう** なぜ $\frac{2}{3x^2}$ や $-\frac{3}{2x^2}$ の項は捨ててよいのに、$\frac{1}{x}$ は捨ててはいけないのか？

目標の $3-\frac{9}{x}$ は $\frac{1}{x}$ のオーダーまで正確である。$1/y$ において、補正項は $\frac{1}{x}$ よりさらに $\frac{1}{x^2}$ 倍だけ小さいので、y には $\frac{1}{x^2}$ 以上のオーダーでしか影響しない。$-\frac{9}{x}$ を生み出すのは、$\frac{1}{x}$ の項そのものである。

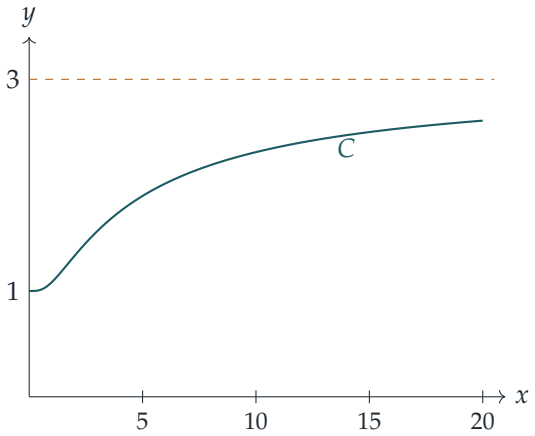
C の概形

ここで曲線の特徴をまとめる。

- $y(0) = 1$ であり、$x = 0$ で $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ である。原点の近くでは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \approx x^3$ なので $y \approx 1 + \frac{1}{4}x^4$ となる。つまり曲線は非常に平らに始まる。
- $x > 0$ では傾きは真に正なので、y は増加する。
- $1/y$ の第 1 項は正なので $1/y > \frac{1}{3}$ であり、すべての x に対して $1 \le y < 3$ となる。曲線が発散することはない。

▶ $x \to \infty$ のとき $y \to 3$ であり、$3 - \frac{9}{x}$ のように下から近づく。その近づき方は遅く、$y(10) \approx 2.31$ である。

曲線は下に凸（concave up）の状態で始まり、その後 $y = 3$ に向かって平らになっていくので、変曲点（point of inflection）をもたなければならない。



z の曲線

$z \neq 0$ であるところでは z^3 で割ることができる。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z^{-2}\right) = -2z^{-3}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3}\cdot\frac{x^3z^3}{2(1+x^2)^{5/2}} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}},$$

となり、これはまさに $1/y$ が満たす方程式である。どちらの曲線でも $x = 0$ において $1/z^2 = 1$ であり、これは $1/y$ と同じ値である。よって

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{y}, \qquad \text{すなわち} \qquad z^2 = y.$$

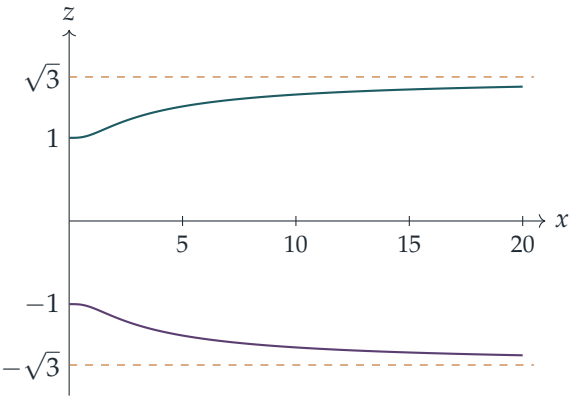
これにより、z が決して 0 に達しないことも確かめられ、割り算が正当化される。$z \neq 0$ である間は $z^2 = y \geq 1$ なので、z は 0 に近づくことができない。したがって連続性（continuity）により、z は最初の符号を保ち、2 つの曲線は次のようになる：

$$z = \sqrt{y} \quad (z(0) = 1), \qquad z = -\sqrt{y} \quad (z(0) = -1).$$

上側の曲線は 1 から $\sqrt{3}$ に向かって上昇し、やはり平らに始まる（今度は $z \approx 1 + \frac{1}{8}x^4$）。また x が大きいとき

$$z = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{x} + \cdots\right)^{1/2} \approx \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2x}.$$

下側の曲線は、これを x 軸に関して折り返したものである。すなわち -1 から漸近線（asymptote）$z = -\sqrt{3}$ に向かって下降する。



考えてみよう $z(0) = -1$ の曲線が、もう一方の曲線を平行移動したり、何らかの変換をしたりした単なるコピーではないのはなぜか？

この方程式は z について奇である。すなわち z を $-z$ に置き換えると、両辺がともに -1 倍になる。よって $z(x)$ が解ならば $-z(x)$ も解であり、-1 から始まる解は $+1$ から始まる解の折り返しである。これは $z = \pm\sqrt{y}$ と合致する。

検算

- 答えを微分する。$1/y = u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-3/2} + \frac{1}{3}$ とすると、$\mathrm{d}(1/y)/\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{1}{2}u^{-5/2}\right) = -x^3u^{-5/2}$ となり、必要な式が得られる。
- もとの方程式の数値解（ルンゲ＝クッタ法、Runge–Kutta）は $y(1) = 1.08391$、$y(5) = 1.89777$ を与え、公式と有効数字 10 桁以上で一致する。z の方程式を数値的に解くと $z(5) = \pm 1.37759 = \pm\sqrt{y(5)}$ となる。
- $x = 100$ のとき公式は $y = 2.9126$ を与え、これに対して $3 - \frac{9}{x} = 2.91$ である。差は約 $27/x^2$ であり、$O(1/x^2)$ の誤差と整合する。

よくある間違い

- 負号を落とす：$\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -y^{-1}$。
- $3 - \frac{9}{x}$ が 3 に「近く見える」ので、$y \to 3$ は速いと結論してしまう。$x = 10$ でも、曲線はまだ約 2.3 にすぎない。
- 両方の曲線について $z = \sqrt{y}$ と書いてしまう。あるいは、z が符号を変えられない理由を説明し損なう。

STEP のその先へ

どちらの方程式も $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)\,y^n$ の形をしており、これは**ベルヌーイの微分方程式**（Bernoulli equation）の特別な場合である。この方程式は置換 $w = y^{1-n}$ によって常に線形方程式に帰着される。私たちが用いたのはまさにこの置換、すなわち $w = 1/y$ と $w = 1/z^2$ である。「同じ方程式、同じ初期値、ゆえに同じ関数」という論法は、1 階微分方程式に対する解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem、ピカール＝リンデレフ（Picard–Lindelöf）の定理）の一例である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、その両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。