解答例

STEP II 2005、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと円運動

> **STEP II 2005、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q7

鍵となる考え方

どの位置ベクトル（position vector）も $\cos(\text{角})\,\mathbf{a} + \sin(\text{角})\,\mathbf{b}$ の形をしており、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が垂直で長さが等しいとき、これは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の張る平面内の円を描く。$|OP|$ と $|OQ|$ が一定であることがわかれば、角 POQ は内積（scalar product）からすぐに求まり、積和の公式（product-to-sum formulae）によって一つのコサインにまとめられる。最後の小問は、二周期分にわたる一つのコサインについての不等式に帰着する。

解答

小問 (i)

P と Q の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$ と書く。

P については $\mathbf{p} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ であるから、$|\mathbf{p}| = 1$ であり、$\mathbf{p}$ は xy 平面内にある。したがって P は平面 $z = 0$ 内の中心 O、半径 1 の円周上を、上から（z 軸の正の側から）見て反時計回りに、一定の角速度（angular speed）1（したがって速さ 1）で動く。P は $(1,0,0)$ から出発し、t が 0 から 2π まで動く間にちょうど一周する。

Q については、$s = t + \frac{1}{4}\pi$ とおき、

$$\mathbf{a} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{j}, \qquad \text{とすると} \qquad \mathbf{q} = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}.$$

ここで $|\mathbf{a}|^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$、$|\mathbf{b}|^2 = 9$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ である。よって

$$|\mathbf{q}|^2 = 9\cos^2 s + 9\sin^2 s + 2\cos s \sin s\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 9,$$

であり、$\mathbf{q}$ はつねに O を通り $\mathbf{a}$ と $\mathbf{j}$ で張られる平面内にある。この平面は y 軸と方向

$\mathbf{i}+\sqrt{3}\mathbf{k}$ を含むので、その方程式は $z=\sqrt{3}x$ である。その法線ベクトル $-\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{k}$ が $\mathbf{k}$ となす角は $\arccos\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\pi$ である。

したがって Q は、y 軸を含み P の円の平面に対して 60° 傾いた平面 $z=\sqrt{3}x$ 内の、中心 O、半径 3 の円周上を動く。Q もまた角速度 1（速さ 3）で一周し、$\mathbf{a}$ の方向から $\mathbf{j}$ の方向へと回転する。その位相はつねに P より $\frac{1}{4}\pi$ だけ進んでいる。すなわち $t=0$ において Q は $\mathbf{a}$ から角 $\frac{1}{4}\pi$ の位置、$\frac{3}{2\sqrt{2}}(1,\,2,\,\sqrt{3})$ にある。

小問 (ii)

$|\mathbf{p}|=1$、$|\mathbf{q}|=3$ であるから、

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{3}=\frac{\frac{3}{2}\cos t\cos s+3\sin t\sin s}{3}=\tfrac{1}{2}\cos t\cos s+\sin t\sin s,$$

ただし $s=t+\frac{1}{4}\pi$ である。$t+s=2t+\frac{1}{4}\pi$、$s-t=\frac{1}{4}\pi$ として積和の公式を用いると

$$\cos t\cos s=\tfrac{1}{2}[\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)+\cos\tfrac{1}{4}\pi],$$
$$\sin t\sin s=\tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{1}{4}\pi-\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)].$$

$C=\cos(2t+\frac{1}{4}\pi)$ とおき、$\cos\frac{1}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を用いると

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\tfrac{1}{4}(C+\tfrac{\sqrt{2}}{2})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-C)\\&=\tfrac{\sqrt{2}}{8}+\tfrac{\sqrt{2}}{4}-\tfrac{1}{4}C=\tfrac{3\sqrt{2}}{8}-\tfrac{1}{4}\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

> **考えてみよう** $\theta\geq\frac{1}{4}\pi$ を $\cos\theta$ についての条件に言い換えるにはどうすればよいか。

コサインは $[0,\pi]$ 上で狭義単調減少（strictly decreasing）であり、θ も $\frac{1}{4}\pi$ もこの区間に属するので、

$$\theta\geq\tfrac{1}{4}\pi\iff\cos\theta\leq\cos\tfrac{1}{4}\pi=\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\tfrac{4\sqrt{2}}{8}.$$

小問 (ii) より、これは

$$\tfrac{3\sqrt{2}}{8}-\tfrac{1}{4}\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)\leq\tfrac{4\sqrt{2}}{8}\iff\cos(2t+\tfrac{1}{4}\pi)\geq-\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

と同値である。$u=2t+\frac{1}{4}\pi$ とおく。t が $[0,2\pi]$ を動くとき、u は長さ 4π の区間 $[\frac{1}{4}\pi,\frac{17}{4}\pi]$ を動く。これは $\cos u$ のちょうど二周期分である。各周期において、$\cos u<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ とな

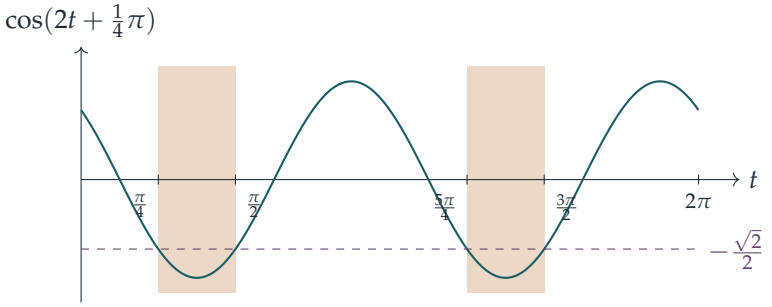
るのはちょうど長さ $\frac{1}{2}\pi$ の開区間（2π を法として $\frac{3}{4}\pi$ と $\frac{5}{4}\pi$ の間）である。ここで条件を満たさない値は

$$u \in (\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi) \cup (\tfrac{11}{4}\pi, \tfrac{13}{4}\pi) \iff t \in (\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{3}{2}\pi),$$

であり、いずれも t について長さ $\frac{1}{4}\pi$ である。したがって $\theta < \frac{1}{4}\pi$ となる時間の合計は $\frac{1}{2}\pi$ であり、$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ となる時間の合計は

$$2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{2}\pi,$$

となり、示すべきことが得られた。



網掛けの帯は、曲線が $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ より下に沈む部分、すなわち $\theta < \frac{1}{4}\pi$ となる部分である。

検算

- $t = 0$ のとき：$\mathbf{p} = \mathbf{i}$、$\mathbf{q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$ であるから、直接計算すると $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ である。公式からは $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ が得られる。両者は一致する。
- $\cos\theta$ は $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.280$ と $\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.780$ の間にあるので、θ が 0 になることはない。これは納得できる。$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ が平行になりうるのは二つの平面が交わる y 軸上だけであるが、P がその軸上にあるのは $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき、Q がその軸上にあるのは $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ のときだからである。
- $[0, 2\pi]$ 内の二百万点で t を標本化し、ベクトルから直接 θ を計算すると、$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ となる時間の合計は 4.712389 となり、$\frac{3}{2}\pi \approx 4.712389$ と一致する。

よくある間違い

- $|\mathbf{p}||\mathbf{q}| = 3$ で割るのを忘れる。あるいは、$\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ の係数が異なるからといって $|\mathbf{q}|$ が変化すると思い込む。

- 不等号の向きを逆にする。コサインは $[0, \pi]$ 上で減少するので、$\theta \geq \frac{1}{4}\pi$ は $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ を意味する。
- $\cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$ の一周期分しか数えない。$2t$ があるため、t が一周する間にこれは二周する。

STEP のその先へ

原点を中心とする任意の円は、$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ かつ $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ として $\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}$ と書ける。これらの条件を外すと楕円（ellipse）が得られ、一般には単位円の線形写像（linear map）による像となる。このように曲線を捉え、動くベクトルどうしのなす角を内積で測ることは、大学一年で学ぶ線形代数（linear algebra）やベクトル解析（vector calculus）の出発点である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方をわかりやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。