解答例

STEP II 2005、第 6 問

純粋数学 • 二項級数の和

> **STEP II 2005、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q6

鍵となる考え方

ここに現れる和はいずれも、ある特定の x における冪級数（power series）の値である。したがって、なすべきことは、それがどの関数から来ているかを見抜くことである。小問 (i) での工夫は、n と n^2 を、先ほど書き出した係数そのものである 1、$n+1$、$(n+1)(n+2)$ の組合せとして書き直すことである。小問 (ii) でも、$(1-x)^{-1/2}$ と $(1-x)^{-3/2}$ の係数がどのような関係にあるかに気づけば、同じ考え方が通用する。

解答

小問 (i)

負の整数乗に対する二項定理（binomial theorem）（$|x|<1$ で成り立つ）により、$n \geq 0$ に対する x^n の係数は

$$(1-x)^{-1}: \quad 1, \qquad (1-x)^{-2}: \quad n+1, \qquad (1-x)^{-3}: \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

である。たとえば、$(1-x)^{-3}$ における係数は $\dfrac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ である。

一つ目の和。 $n=(n+1)-1$ であるから、$|x|<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

となる（右辺の二つの級数はともに収束（converge）するので、和を分けてよい）。

$n=0$ の項は 0 であるから、$x=\frac{1}{2}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = 4-2 = 2.$$

を得る。

二つ目の和。 n^2 を $(n+1)(n+2)$、$n+1$、1 の組合せとして表したい。$(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$ であるから

$$n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1.$$

である。よって、$|x|<1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

となる。ここで係数 2 が現れるのは、$(1-x)^{-3}$ における係数が $(n+1)(n+2)$ の**半分**だからである。やはり $n=0$ の項は消え、$x=\frac{1}{2}$ では

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,2^{-n} = 2\cdot 8 - 3\cdot 4 + 2 = 6.$$

となる。

小問 (ii)

指数 $-\frac{1}{2}$ の二項定理により、$(1-x)^{-1/2}$ における x^n の係数は

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\,n!}.$$

である。

考えてみよう 奇数の積を階乗に直すにはどうすればよいか。

抜けている偶数を補えばよい。$(2n)! = (1\cdot 3\cdots(2n-1))(2\cdot 4\cdots 2n)$ であり、$2\cdot 4\cdots 2n = 2^n n!$ である。したがって $1\cdot 3\cdots(2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ となり、係数は

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!\cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}.$$

である。これは $n=0$ のときにも成り立つ（空積であり、$a_0=1$）。よって $|x|<1$ のとき

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}},$$

となり、示すべき式が得られた。

一つ目の和。 求める和は $x = \frac{1}{3}$ における $\sum a_n x^n$ であり、この値は展開が成り立つ区間の内部にある。したがって、その値は

$$\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

である。

二つ目の和。 今度は $\sum n a_n x^n$ が必要である。小問 (i) と同じ発想で、$n a_n$ を既知の級数と結びつける。上とまったく同様にして、$(1-x)^{-3/2}$ における x^m の係数は

$$b_m = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}{2^m\, m!} = (2m+1)\, a_m.$$

である。a_n の式から、隣り合う係数の比は $a_n / a_{n-1} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2 \cdot 4} = \dfrac{2n-1}{2n}$ であるから、$n \geq 1$ に対して

$$n\, a_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\, a_{n-1} = \tfrac{1}{2}\, b_{n-1}.$$

が成り立つ。したがって、$|x| < 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = \frac{x}{2}(1-x)^{-3/2}.$$

となる（同じことだが、$(1-x)^{-1/2}$ の級数を項別微分（term-by-term differentiation）し、x を掛けてもよい。項別微分は収束区間の内部では許される）。$x = \frac{1}{3}$ では

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}\, 3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

となる。

検算

- $\sum n 2^{-n}$ の最初のいくつかの項は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \cdots$ であり、4 項までで既に 1.625 となり、少しずつ 2 に近づいていく。$\sum n^2 2^{-n}$ の 200 項までの部分和は、小数点以下何桁にもわたって 6 と一致する。
- 数値的には $\sqrt{6}/2 \approx 1.224745$、$\sqrt{6}/8 \approx 0.306186$ であり、小問 (ii) の二つの級数の部分和はいずれも小数点以下 12 桁まで一致する。
- 一般項の簡単な確認：$n = 1$ のとき $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ であり、これはおなじみの展開 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$ の係数である。

よくある間違い

- $(1-x)^{-3}$ の係数にある $\frac{1}{2}$ を忘れること。そうすると $\sum n^2 2^{-n}$ が $8 - 12 + 2 = -2$ となるが、正の項の和としてこれはあり得ない。

- $(1-x)^{-2}$ の級数の係数を $n+1$ ではなく n から始めてしまうこと。正しい級数は $1+2x+3x^2+\cdots$ である。
- 最後の和で x を一つ落とすこと。$\sum na_n x^{n-1}$ は導関数であるが、求める和は $\sum na_n x^n$ である。

STEP のその先へ

ここで行った操作（級数をいくつかの部分に分けること、項別に微分すること）が正当化されるのは、冪級数がその収束半径（radius of convergence）の内部で絶対収束（absolute convergence）し、そこで項別微分できるからである。これを丁寧に証明することは、解析学（analysis）の最初の講義の標準的な内容である。係数 $\binom{2n}{n}/4^n$ は確率論にも現れ、単純ランダムウォーク（simple random walk）が $2n$ ステップ後に出発点に戻っている確率に等しい。解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。