解答例

STEP II 2005、第 5 問

純粋数学 ・ 内接円と外接円

> **STEP II 2005、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q5

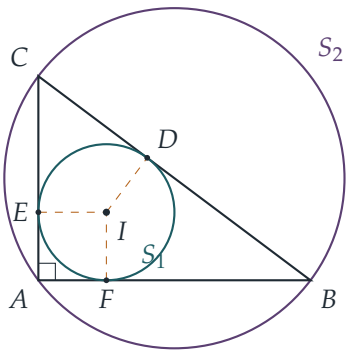
鍵となる考え方

円の外部の点からその円に引いた 2 本の接線（tangent）の長さは等しい。これを各頂点に当てはめると、三角形の各辺は 2 つの接線の長さに分かれ、直角の頂点ではその 2 つの接線の長さがちょうど r になる。これにより r の式はほとんどすぐに得られる。面積比については、直角があることから斜辺（hypotenuse）が S_2 の直径（diameter）であることがわかり、ピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）を使うとすべてを $b+c$ と a だけで表せる。q が現れるのはこのためである。

解答

内接円の半径

S_1 の中心を I とし、S_1 が BC、CA、AB とそれぞれ D、E、F で接するとする。



半径は接線と直交するので、$IE \perp AC$ かつ $IF \perp AB$ である。A における直角と合わ

せると、$AEIF$ は隣り合う2辺が $IE = IF = r$ の長方形となるので、これは正方形であり、

$$AE = AF = r.$$

外部の点から引いた接線の長さは等しいので、$BF = BD$、$CE = CD$ である。よって

$$c = AF + FB = r + BD, \qquad b = AE + EC = r + CD, \qquad a = BD + DC.$$

はじめの2式を足して3番目の式を引くと

$$b + c - a = 2r + BD + CD - (BD + DC) = 2r,$$

となり、示すべき式が得られた。

面積比

$\angle BAC = 90^\circ$ であるから、半円の円周角の定理（angle in a semicircle theorem）の逆により、BC は外接円（circumcircle）S_2 の直径である。したがって S_2 の半径は $\frac{1}{2}a$、面積は $\frac{1}{4}\pi a^2$ である。

S_1 と三角形の間の領域は、三角形から S_1 の円板を取り除いたものなので、その面積は $\frac{1}{2}bc - \pi r^2$ である。したがって

$$R = \frac{\frac{1}{2}bc - \pi r^2}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \text{よって} \qquad \pi R = \frac{2bc - 4\pi r^2}{a^2} = \frac{2bc}{a^2} - \pi\,\frac{(b + c - a)^2}{a^2},$$

ここで $2r = b + c - a$ を用いた。

考えてみよう $2bc/a^2$ を q だけを含む式に変えるにはどうすればよいか。

ピタゴラスの定理より $b^2 + c^2 = a^2$ であるから、$2bc = (b + c)^2 - (b^2 + c^2) = (b + c)^2 - a^2$ となる。a^2 で割ると

$$\frac{2bc}{a^2} = q^2 - 1, \qquad \frac{(b + c - a)^2}{a^2} = \left(\frac{b + c}{a} - 1\right)^2 = (q - 1)^2.$$

よって

$$\begin{aligned} \pi R &= q^2 - 1 - \pi(q^2 - 2q + 1) \\ &= -(\pi - 1)q^2 + 2\pi q - (\pi + 1), \end{aligned}$$

となり、求める結果が得られた。

R の上界

右辺は q の 2 次式で、最高次の係数 $-(\pi-1)$ は負であるから、平方完成（completing the square）する。

$$\begin{aligned}\pi R &= -(\pi-1)\left(q^2-\frac{2\pi}{\pi-1}\,q\right)-(\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q-\frac{\pi}{\pi-1}\right)^2+\frac{\pi^2}{\pi-1}-(\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q-\frac{\pi}{\pi-1}\right)^2+\frac{\pi^2-(\pi^2-1)}{\pi-1}\\ &= \frac{1}{\pi-1}-(\pi-1)\left(q-\frac{\pi}{\pi-1}\right)^2.\end{aligned}$$

$\pi-1>0$ より 2 乗の項は引かれるので、すべての実数 q に対して $\pi R \le \dfrac{1}{\pi-1}$ であり、$\pi>0$ で割ると

$$R \le \frac{1}{\pi(\pi-1)}.$$

これが導くよう求められていた不等式である。

この上界が実際には達成されないことにも注意しておく価値がある。等号が成り立つには $q=\pi/(\pi-1)\approx 1.467$ が必要だが、直角三角形（right-angled triangle）では $(b+c)^2=a^2+2bc\le a^2+(b^2+c^2)=2a^2$（相加・相乗平均の不等式（AM–GM）より $2bc\le b^2+c^2$）であるから、$q\le\sqrt{2}\approx 1.414$ となる。R が最大になるのは直角二等辺三角形（isosceles triangle）、すなわち $q=\sqrt{2}$ のときで、$R=(2\sqrt{2}\,\pi-3\pi+1)/\pi\approx 0.1467$ となり、上界 $1/(\pi(\pi-1))\approx 0.1486$ をわずかに下回る。

検算

辺の長さが 3–4–5 の三角形（$b=4$、$c=3$、$a=5$）では、公式から $r=1$ が得られる。実際、面積 6 を半周長（semi-perimeter）6 で割ると 1 であり、これは標準的な公式 $r=$ 面積$/s$ に一致する。このとき $R=(6-\pi)/(\frac{25}{4}\pi)\approx 0.14558$ であり、2 次式に $q=1.4$ を代入しても同じ値が得られる。10^5 個の直角三角形を無作為に選んで調べたところ、πR の恒等式はすべての場合に成り立ち、0.14674 を超える R は見つからなかった。これは上界 0.14863 と整合している。

よくある間違い

- S_2 の半径が a ではなく $\frac{1}{2}a$ であることを忘れる。斜辺は**直径**である。
- $b^2+c^2=a^2$ を用いて $2bc=(b+c)^2-a^2$ と書く代わりに、$2bc/a^2$ を直接展開しようとする。

- $q = \pi/(\pi - 1)$ が実現可能かどうかを確かめずに、上界が達成されると主張する。実際には達成されないが、問題が求めているのは不等式だけである。

STEP のその先へ

一般の三角形の内接円（incircle）と外接円は、それらの中心間の距離 d についてのオイラー（Euler）の公式 $d^2 = R_2(R_2 - 2r)$ によって結びついている。ここで R_2 は外接円の半径である。この公式から $R_2 \geq 2r$ が導かれ、等号が成り立つのは正三角形のときに限る。このような結果や、図形の族の上で比を最適化するという考え方は、幾何的不等式（geometric inequalities）の研究へとつながっていく。Coxeter と Greitzer の *Geometry Revisited*（『幾何学再入門』）は次の一歩として素晴らしい本であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（無料、CC BY）には STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。