解答例

STEP II 2005、第 4 問

純粋数学 • 逆正接関数の恒等式

> **STEP II 2005、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q4

鍵となる考え方

逆正接（inverse tangent）の和は、両辺の正接をとり、$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ を用いて扱う。条件 $bc = a^2 + 1$ は、まさに分母を分子と打ち消し合う形に因数分解（factorise）させるためのものである。そこから先は構造の問題である。最初の結果は一つの逆正接を二つに**分割する**規則であり、4 項の恒等式はその規則を木（tree）の各段で一度ずつ、計 2 回適用したものである。数値の部分では、逆向きにたどって、どのような分割がその四つの数を生み出したのかを求めればよい。

解答

最初の恒等式

$A = \arctan\frac{1}{a+b}$、$B = \arctan\frac{1}{a+c}$ とおく。$a, b, c > 0$ であるから $\frac{1}{a+b}$ と $\frac{1}{a+c}$ はともに正であり、したがって $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$、$A + B \in (0, \pi)$ である。$bc = a^2 + 1$ を用いると、

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) - 1 &= a^2 + ab + ac + bc - 1 \\ &= 2a^2 + ab + ac = a(2a + b + c).\end{aligned}$$

よって加法定理（addition formula）により、

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}}{1 - \dfrac{1}{(a+b)(a+c)}} = \frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c) - 1} \\ &= \frac{2a+b+c}{a(2a+b+c)} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

ここで $2a+b+c>0$ であるから約分してよい。

考えてみよう $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$ から本当に $A+B=\arctan\frac{1}{a}$ が得られるだろうか。

自動的には得られない。tan は周期 (period) π をもつので、$A+B$ が arctan の値域である $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に入っていることを確かめる必要がある。$A+B\in(0,\pi)$ であることはわかっている。また $(a+b)(a+c)-1=a(2a+b+c)>0$ であるから $\tan A\tan B<1$ となり、加法定理の分母は正である。分子も正なので $\tan(A+B)>0$ となり、$A+B\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ の可能性は排除される（実際、$\tan(A+B)$ は $\frac{\pi}{2}$ で定義されず、$(\frac{\pi}{2},\pi)$ では負である）。したがって $A+B\in(0,\frac{\pi}{2})$ であり、$\arctan\frac{1}{a}$ はこの区間で正接が $\frac{1}{a}$ となる唯一の角であるから、

$$\arctan\frac{1}{a+b}+\arctan\frac{1}{a+c}=\arctan\frac{1}{a}.\qquad\blacksquare$$

4 項の恒等式

最初の恒等式を 3 回適用する。いずれの場合も、関わる三つの数はすべて正である。

- $a=p+q$、$b=s$、$c=t$ とすると、条件は $st=(p+q)^2+1$ であり、これは与えられているので、
$$\arctan\frac{1}{p+q+s}+\arctan\frac{1}{p+q+t}=\arctan\frac{1}{p+q}.$$
- $a=p+r$、$b=u$、$c=v$ とすると、条件 $uv=(p+r)^2+1$ は与えられているので、
$$\arctan\frac{1}{p+r+u}+\arctan\frac{1}{p+r+v}=\arctan\frac{1}{p+r}.$$
- $a=p$、$b=q$、$c=r$ とすると、条件 $qr=p^2+1$ は与えられているので、
$$\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{1}{p+r}=\arctan\frac{1}{p}.$$

最初の 2 式を加えて 3 番目の式を用いると、四つの逆正接の和は $\arctan\frac{1}{p}$ となり、示すべきことが得られた。$\blacksquare$

数値の恒等式

$p=7$ が必要なので $qr=50$ である。q と r を当て推量するのではなく、四つの数から逆向きにたどる。13 と 21 が最初の恒等式を 1 回用いたときの組 $a+b$、$a+c$ であるとすると、$b=13-a$、$c=21-a$ であり、$bc=a^2+1$ から

$$(13-a)(21-a)=a^2+1\iff 273-34a=1\iff a=8.$$

同様に、82 と 187 が組であるとすると、

$$(82-a)(187-a) = a^2+1 \iff 15334 - 269a = 1 \iff a = 57.$$

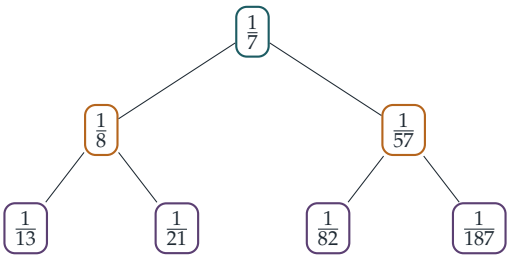
そこで $p+q=8$、$p+r=57$、すなわち $q=1$、$r=50$ を試す。すると $s=13-8=5$、$t=21-8=13$、$u=82-57=25$、$v=187-57=130$ となる。七つの数はすべて正であり、三つの条件も成り立つ：

$$qr = 50 = 7^2+1, \qquad st = 65 = 8^2+1, \qquad uv = 3250 = 57^2+1.$$

これらの値では $p+q+s=13$、$p+q+t=21$、$p+r+u=82$、$p+r+v=187$ であるから、4 項の恒等式により

$$\arctan\frac{1}{13} + \arctan\frac{1}{21} + \arctan\frac{1}{82} + \arctan\frac{1}{187} = \arctan\frac{1}{7}. \qquad \blacksquare$$

下の木は $\arctan\frac{1}{7}$ がどのように分割されるかを示している。



各節点の逆正接は、その子の逆正接の和である：$1\cdot 50 = 7^2+1$、$5\cdot 13 = 8^2+1$、$25\cdot 130 = 57^2+1$。

検算

- 数値的には、最後の恒等式の両辺はともに 0.1418970546… である。
- 分数で厳密に計算すると、$\frac{1}{13}, \frac{1}{21}$ に対する $\tan(A+B)$ は $\frac{34}{272} = \frac{1}{8}$、$\frac{1}{82}, \frac{1}{187}$ に対しては $\frac{269}{15333} = \frac{1}{57}$、$\frac{1}{8}, \frac{1}{57}$ に対しては $\frac{65}{455} = \frac{1}{7}$ である。
- 最初の恒等式の特別な場合：$a=1$、$b=1$、$c=2$ とすると、有名な $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ が得られる。

よくある間違い

- $A+B$ が $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に入ることを確かめずに、$\tan(A+B) = \frac{1}{a}$ から $A+B = \arctan\frac{1}{a}$ と結論してしまう。

- 50、65、3250 の因数分解をやみくもに探してしまう。組 13, 21 から逆向きにたどれば、1 行で $a = 8$ が求まる。

STEP のその先へ

このような恒等式の背後には、$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ のようなマチン（Machin）型の公式がある。x が小さいとき $\arctan x$ は速く収束する級数をもつので、これらの公式は何世紀にもわたって手計算で π を求めるのに使われてきた。これらを最もすっきりと理解する方法は複素数（complex numbers）を通して見ることである。$\arctan\frac{1}{n}$ は $n + \mathrm{i}$ の偏角（argument）であるから、逆正接を加えることはガウス整数（Gaussian integers）を掛け合わせることに対応し、条件 $bc = a^2 + 1$ は $a^2 + 1 = (a + \mathrm{i})(a - \mathrm{i})$ という因数分解が姿を変えたものにほかならない。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）はこの乗法の幾何学的な見方を展開しており、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は二つの平方数の和を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。