解答例

STEP II 2005、第 3 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 2005、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q3

鍵となる考え方

まず微分する。$\sin x - x\cos x$ の導関数（derivative）は符号が一目でわかる形にまとまり、そこからグラフの概形と y の範囲が一度に得られる。二つの積分は部分積分（integration by parts）による定型的な計算であり、2 乗の項には倍角の公式（double-angle formulae）を用いる。最後の不等式は二つの積分を比較して得られる。0 と 1 の間にある数は、その 2 乗以上である。

解答

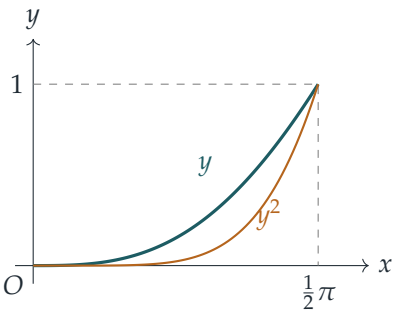
概形と範囲

積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ では x と $\sin x$ はともに正であるから、y は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ において狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって最小値は $y(0) = 0 - 0 = 0$、最大値は $y(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0 = 1$ である。ゆえに $0 \leq y \leq 1$ であり、さらに $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $0 < y < 1$ が成り立つ。

形については、$(0, \frac{1}{2}\pi]$ において $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x + x\cos x > 0$ であるから、曲線は全体にわたって下に凸である。原点での傾きは 0 である。マクローリン級数（Maclaurin series）を用いると $y = (x - \frac{1}{6}x^3) - x(1 - \frac{1}{2}x^2) + \cdots = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ となるので、曲線は 3 次関数のように非常に平らに原点から立ち上がる。$x = \frac{1}{2}\pi$ での傾きは $\frac{1}{2}\pi$ である。



最後の部分の鍵となるので、琥珀色の曲線 y^2 もあわせて示してある。

小問 (i)

$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$ が必要である。$u = x$、$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$ として部分積分すると、

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

$\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$ であるから、

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = 1 - (\tfrac{1}{2}\pi - 1) = 2 - \frac{\pi}{2},$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (ii)

展開して、$2\sin x\cos x = \sin 2x$ と $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ を用いると、

$$y^2 = \sin^2 x - 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x = \sin^2 x - x\sin 2x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2\cos 2x,$$

となる。四つの項を順に扱う。

まず、$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ であり、$\sin 2x$ は両端で 0 になるので、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

次に、$u = x$、$\mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x$ として部分積分し、$\cos\pi = -1$ を用いると、

$$\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

3 番目は $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(\frac{1}{2}\pi)^3 = \dfrac{\pi^3}{48}$ である。

最後に、$u = x^2$、$\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$ として部分積分する。境界項 $[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x]_0^{\pi/2}$ は 0 であり、残る積分はいま求めたものである：

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4},$$

よって最後の項の寄与は $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{8}\pi$ である。

四つの項を足し合わせると、

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

となり、求める結果が得られる。

結論の導出

考えてみよう 二つの積分から、どうすれば π に関する不等式が得られるだろうか。

被積分関数（integrand）どうしを比較する。$0 \le y \le 1$ であるから、区間全体で $y - y^2 = y(1-y) \ge 0$ である。さらに、$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ では $0 < y < 1$ を示したので、そこでは $y(1-y) > 0$ である。非負であり、ある開区間上で狭義に正である連続関数（continuous function）の積分は、狭義に正である。したがって

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2}.$$

48 を掛ける（正の数なので不等号の向きは変わらない）と、

$$\pi^3 - 6\pi < 96 - 24\pi, \qquad \text{よって} \qquad \pi^3 + 18\pi < 96.$$

これが求める結果である。

検算

- 数値的には $2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0.4292$、$\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi \approx 0.2533$ である。元の被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 12 位まで同じ値が得られる。$0 \le y \le 1$ であるから当然だが、どちらも 0 と $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ の間にある。
- 2 番目の積分は 1 番目より小さい。これは y^2 のグラフが y の下にあることから予想されるとおりである。
- $\pi \approx 3.1416$ とすると $\pi^3 + 18\pi \approx 31.006 + 56.549 = 87.55$ であり、96 を十分に下回る。

よくある間違い

- $\int x \sin 2x \, \mathrm{d}x$ の境界項の符号を間違える。$x = \frac{1}{2}\pi$ では $\cos 2x = \cos \pi = -1$ であるから、$-\frac{1}{2}x \cos 2x$ は $+\frac{1}{4}\pi$ となる。
- 最後の段階で $\leq$ しか主張しない。狭義の不等式を得るには、単に ≥ 0 ではなく、どこかで $y(1-y) > 0$ であることが必要である。
- $y \leq 1$ である理由を述べ忘れる。y が増加関数であるという事実なしに、$y(\frac{1}{2}\pi) = 1$ を知っているだけでは不十分である。

STEP のその先へ

最後の段階は、ある大きな考え方の小さな例である。関数どうしの不等式を積分すると数どうしの不等式が得られ、関数をうまく選べば π のような定数を挟み込むことができる。同じ戦略により、$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \, \mathrm{d}x > 0$ から $\frac{22}{7} > \pi$ を導く有名な証明が得られ、さらに本格的なものとしては、π が無理数（irrational）であることのニーヴン（Niven）による証明がある。解析学（analysis）の最初の講義では、連続かつ非負で、どこかで正となる関数の積分は正であることを厳密に証明する。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これがきちんと示される様子を見るのに親しみやすい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。