解答例

STEP II 2005、第 12 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 2005、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q12

鍵となる考え方

これは、公平な硬貨を事前分布（prior）とするベイズの定理（Bayes' theorem）である。硬貨が公平であるから、回答が与えられたときに表である確率が $\frac{1}{2}$ になるのは、硬貨が表であっても裏であっても、その回答が**同じ確率で起こる**（equally likely）とき、かつそのときに限る。したがって各小問では、二つの尤度（likelihood）$\mathrm{P}(\text{回答} \mid H)$ と $\mathrm{P}(\text{回答} \mid T)$ を比べればよく、それらを求めるにはどちらの双子がオンラインであるかで条件付けをすればよい。

解答

硬貨が表である事象、裏である事象をそれぞれ H、T とすると、$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T) = \frac{1}{2}$ である。Anna がオンラインである事象を A、Bella がオンラインである事象を B とし、$\mathrm{P}(A) = p$、$\mathrm{P}(B) = q = 1 - p$ とする。誰がオンラインであるかは硬貨とは無関係であるから、A と B は H と独立（independent）である。小問 (ii) と (iii) では、硬貨は一度だけ投げられ、二通の電子メールはどちらも同じ双子、すなわちこちらがメールを書いたときにオンラインであった方が答えるものと解釈する（もう一つの解釈については最後の注意を参照のこと）。

一つの回答が正直である全体の確率を $t = ap + bq$ とおく。

回答の任意の記録 E に対して、$\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T)$ のもとでベイズの定理より

$$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H)}{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid T)} = \frac{\mathrm{P}(E \mid H)}{\mathrm{P}(E \mid H) + \mathrm{P}(E \mid T)}.$$

これが $\frac{1}{2}$ に等しいのは、$\mathrm{P}(E \mid H) = \mathrm{P}(E \mid T)$ のとき、かつそのときに限る。この一つ

の観察が仕事の大部分を担う。

小問 (i)

回答が「はい」である事象を Y とする。硬貨が表ならば、「はい」は真実である。誰がオンラインかで条件付けると、

$$\mathrm{P}(Y \mid H) = pa + qb = t.$$

硬貨が裏ならば、「はい」は嘘であるから、

$$\mathrm{P}(Y \mid T) = p(1-a) + q(1-b) = (p+q) - (ap+bq) = 1 - t.$$

よって

$$\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{t}{t + (1-t)} = t = ap + bq.$$

したがって $\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{1}{2}$ となるのは $ap + bq = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $2(ap+bq) = 1$ のとき、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

「はい」の次に「いいえ」が返ってくる事象を E とする。Anna がオンラインであるとしよう。彼女の二つの回答は独立であり、硬貨がどちらの面を出していても、ちょうど一方が真実である：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H \cap A) &= a(1-a) && \text{（正直な「はい」、次に嘘）,} \\ \mathrm{P}(E \mid T \cap A) &= (1-a)a && \text{（嘘、次に正直な「いいえ」）.} \end{aligned}$$

これらは等しい。同様に $\mathrm{P}(E \mid H \cap B) = b(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T \cap B)$ である。したがって

$$\mathrm{P}(E \mid H) = pa(1-a) + qb(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T),$$

となり、上の観察により、p、a、b の値によらず $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ である。

考えてみよう なぜここでは何の条件もなしに、ちょうど $\frac{1}{2}$ が得られるのだろうか。

矛盾する回答は、硬貨がどちらの面を出していても、双子が一度は真実を言い、一度は嘘をついたことを意味する。その組合せは表のもとでも裏のもとでも同じ確率で起こるので、硬貨については何の情報ももたらさず、事前確率 $\frac{1}{2}$ がそのまま残るのである。

小問 (iii)

今度は「はい」の次に「はい」が返ってくる事象を E とする。表ならば二つの回答はどちらも真実であり、裏ならばどちらも嘘である。誰がオンラインかで条件付けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \mid H) &= pa^2 + qb^2,\\ \mathrm{P}(E \mid T) &= p(1-a)^2 + q(1-b)^2.\end{aligned}$$

差をとり、$(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$ を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \mid H) - \mathrm{P}(E \mid T) &= p(a^2 - (1-a)^2) + q(b^2 - (1-b)^2)\\ &= p(2a-1) + q(2b-1)\\ &= 2(ap+bq) - (p+q)\\ &= 2(ap+bq) - 1.\end{aligned}$$

よって $2(ap+bq) = 1$ ならば二つの尤度は等しく、$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ となる。これが示すべきことであった。

（実際には、この計算はそれ以上のことを示している。尤度の差はちょうど $2(ap+bq)-1$ であるから、$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$ が成り立つのは $2(ap+bq) = 1$ のとき、**かつそのときに限る**。これは小問 (i) と同じ条件である。）

注意：もう一つの解釈

そうではなく、電子メールごとに、たまたまオンラインである双子が独立に新しく選ばれるとすると、各回答はそれぞれ独立に確率 t で正直である。このとき (ii) では $\mathrm{P}(E \mid H) = t(1-t) = \mathrm{P}(E \mid T)$ となり、(iii) では $\mathrm{P}(E \mid H) = t^2$、$\mathrm{P}(E \mid T) = (1-t)^2$ となって、これらは $t = \frac{1}{2}$ のとき等しい。結論は同じである。

検算

- 双子がどちらも常に正直である（$a = b = 1$）ならば $t = 1 \neq \frac{1}{2}$ であり、(i) では「はい」によって表であることが確実になる：$\mathrm{P}(H \mid Y) = t = 1$。このとき (ii) のような矛盾する回答は起こりえず、これは $a(1-a) = b(1-b) = 0$ と整合する。
- $p = 0.3$、$a = 0.8$、$b = \frac{0.5-0.24}{0.7} \approx 0.371$（したがって $2(ap+bq) = 1$）として、同じ双子が答えるモデルで 2×10^5 回のシミュレーションを行ったところ、$\mathrm{P}(H \mid$ はい、はい$) \approx 0.496$ が得られた。また、数千組の無作為な (p, a, b) について分数による厳密な数え上げを行い、両方の解釈で三つの結果すべてを確認した。
- $p = \frac{1}{2}$、$a = b = 0.9$ のときは条件が成り立たず、二つの「はい」によって $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{81}{82}$ となり、$\frac{1}{2}$ からかけ離れる。したがって (iii) の条件は本当に重要である。

よくある間違い

- 根拠を示さずに $\mathrm{P}(Y \mid T) = 1 - \mathrm{P}(Y \mid H)$ と書くこと。ここではたまたま正しいが、それは裏のもとでの「はい」が嘘であるからにすぎない。そのことを明記すべきである。
- (iii) で、同じ双子が両方に答えると仮定しながら、二つの回答をそれぞれ確率 t で正直な独立の回答として扱うこと。双子が与えられたもとでは独立であるが、無条件では独立ではない。どちらの回答も誰がオンラインかに依存するからである。

STEP のその先へ

ここにある唯一の原理は、事後オッズ（posterior odds）は事前オッズに尤度比（likelihood ratio）を掛けたものに等しい、というものである。すなわち、どちらの仮説のもとでも同じ確率で起こる証拠からは何もわからない。同じ双子が答えるモデルは単純な**混合**（mixture）モデルである。回答は隠れた変数（誰がオンラインか）が与えられたもとでは独立だが、全体としては従属している。これは隠れ変数モデルやベイズモデルの核心にある考え方である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、まさにこの精神に沿った、条件付けとベイズの規則についての優れた解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。