解答例

# STEP II 2005、第 11 問

力学 ・ 斜面上の摩擦

**STEP II 2005、問 11**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

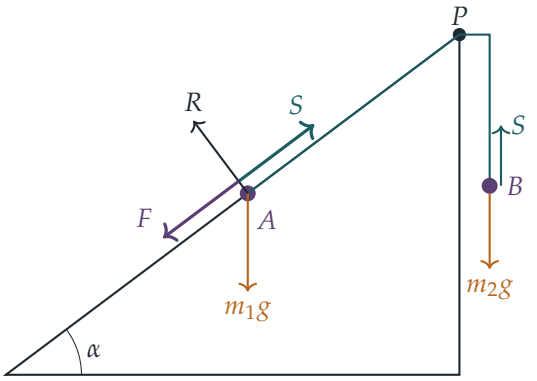
step.maths.org/questions/05-s2-q11

## 鍵となる考え方

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$ より 3–4–5 の直角三角形が得られるので、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ であり、$A$ にはたらくすべての力は $m_1 g$ のきれいな倍数になる。すると $A$ の運動は、加速度が一定である三つの段階に分かれる。糸に引かれて上る段階、自由に滑り上がる段階、そして滑り落ちる段階である。後の二つの段階の間で摩擦力（friction）の向きが変わり、この問題の微妙な点はそこに隠れている。

## 解答

$A$ と $B$ を質点（particle）、糸を軽くて伸びないもの、滑車をなめらかなものとしてモデル化する。したがって張力（tension）$S$ は両側で等しい。$\alpha = \arctan\frac{3}{4}$ とおくと、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$、$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ である。



### 糸が張っている間の加速度

斜面に垂直な方向には $A$ は加速度をもたないので、

$R = m_1 g\cos\alpha = \frac{4}{5}m_1 g,$　　であり、最大摩擦力（limiting friction）は　　$\mu R = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}m_1 g = \frac{2}{5}m_1 g.$

まず、系が動くことを確かめる。もし $B$ が下降するなら、$A$ は斜面を上ることになり、重力の斜面方向の成分 $\frac{3}{5}m_1 g$ と、高々 $\frac{2}{5}m_1 g$ の摩擦力がそれを妨げる。その合計は高々 $m_1 g$ である。逆向きに引くのは $B$ の重力 $m_2 g$ であり、$m_2 > m_1$ なので、摩擦力では系を静止させておけない。したがって $B$ は下降し、$A$ は斜面を上り、$A$ にはたらく摩擦力は最大摩擦力となって斜面に沿って下向きにはたらく。

共通の加速度を $a$ とする。$A$（斜面に沿って上向き）と $B$（下向き）についてニュートンの運動の第二法則（Newton's second law）を用いると、

$$m_1 a = S - \tfrac{3}{5}m_1 g - \tfrac{2}{5}m_1 g = S - m_1 g,$$
$$m_2 a = m_2 g - S.$$

辺々を加えると $(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$ となるので、

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g,$$

であり、これが示すべきことであった。$a = kg$ と書くと便利である。ここで $k = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$ であり、$0 < k < 1$ である。

### 最高点に達する時刻

時刻 $T$ において、$A$ は速さ $u = aT = kgT$ で斜面を上っており、それまでに $\frac{1}{2}kgT^2$ だけ進んでいる。

糸が切れると $S$ はなくなる。$A$ はまだ斜面を上っているので、摩擦力は依然として斜面に沿って下向きにはたらき、斜面下向きの力の合計は $\frac{3}{5}m_1 g + \frac{2}{5}m_1 g = m_1 g$ である。したがって $A$ はちょうど $g$ で減速し、さらに時間

$$\frac{u}{g} = kT.$$

が経過した後に静止する。よって $A$ は、放してから時刻

$$T + kT = (1 + k)T = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, T$$

に最高点に達する。（$A$ が滑車に達することはないと与えられているので、この段階が途中で打ち切られることはない。）この段階で $A$ はさらに $\dfrac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}k^2 gT^2$ だけ進むので、放した点から斜面に沿って上った距離の合計は

$$d = \tfrac{1}{2}kgT^2 + \tfrac{1}{2}k^2 gT^2 = \tfrac{1}{2}k(1 + k)gT^2.$$

である。

**考えてみよう** $A$ が止まった後、そこにとどまるだろうか？

摩擦力で支えられる場合に限り、とどまる。重力の斜面下向きの成分は $\frac{3}{5}m_1g$ であるが、摩擦力は高々 $\frac{2}{5}m_1g$ しか与えられない。同値な言い方をすれば、$\tan\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mu$ である。したがって $A$ は滑り落ち、今度は摩擦力は斜面に沿って**上向き**にはたらく。斜面下向きの合力は $\frac{3}{5}m_1g - \frac{2}{5}m_1g = \frac{1}{5}m_1g$ なので、$A$ は斜面に沿って $\frac{1}{5}g$ の加速度で下る。これは上るときの減速よりずっと穏やかである。

### 質量の比

最高点で静止した状態から、$A$ は時間 $t_d$ をかけて距離 $d$ を滑り戻り、放した点に戻る。ここで

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}g\,t_d^2 = d = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2, \qquad \text{so} \qquad t_d^2 = 5k(1+k)T^2.$$

である。$t_d$ は最高点に達する時刻 $(1+k)T$ に等しいと与えられている。両辺を 2 乗すると、これは

$$(1+k)^2T^2 = 5k(1+k)T^2.$$

を意味する。正である $(1+k)T^2$ で割ると $1+k = 5k$ となり、$k = \frac{1}{4}$ を得る。$T$ が消えたことに注意せよ。このため、糸がいつ切れても等式が成り立ち、しかも $k$ がただ一つに定まるのである。すると

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{1}{4} \iff 4m_2 - 4m_1 = m_2 + m_1 \iff 3m_2 = 5m_1,$$

よって

$$m_1 : m_2 = 3 : 5.$$

## 検算

- 極限の場合：$m_2 \to m_1$ ならば $k \to 0$ であり、最高点に達する時刻は $T$ に近づく（失うべき速さがほとんどない）。$m_2 \gg m_1$ ならば $k \to 1$ であり、$A$ は引かれていたのと同じ時間だけ惰性で進む。速さ $gT$ に達してから $g$ で減速するのだから、これは予想どおりである。
- $m_1 = 3$、$m_2 = 5$、$T = 1\,\mathrm{s}$ とすると $k = \frac{1}{4}$ である。最高点に達するのは 1.25 s で、$d = \frac{5}{32}g$ であり、下りにかかる時間は $\sqrt{2d/(g/5)} = \sqrt{25/16} = 1.25\,\mathrm{s}$ である。三つの段階すべてを逐次的に数値シミュレーションしたところ、$T$ のいくつかの値について、どちらの時間も 1.250 s となった。

## よくある間違い

- $A$ が滑り戻り始めるときに摩擦力の向きが逆になることを忘れ、下向きの加速度として $\frac{1}{5}g$ ではなく $g$（あるいは $\frac{3}{5}g$）を用いてしまう。
- 下りの距離を、放した点からではなく、糸が切れた点からだけ測ってしまう。
- $A$ が実際に滑り戻ることを確かめない。これには $\tan\alpha > \mu$ が必要である。

## STEP のその先へ

摩擦力は、運動の状態に依存する力の典型例である。速度に応じて向きが切り替わり、物体が静止している間はその大きさに上限がある。このため運動は区分的になり、段階ごとに異なる運動方程式が成り立つ。同じ考え方が、きしむ蝶番や地震の断層のようなスティック・スリップ現象（stick–slip phenomena）を支配している。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、大学 1 年の物理学が求める丁寧さで、摩擦と束縛運動を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。