解答例

# STEP II 2005、第 10 問

力学 ・ 放物体の衝突

**STEP II 2005、問 10**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s2-q10

## 鍵となる考え方

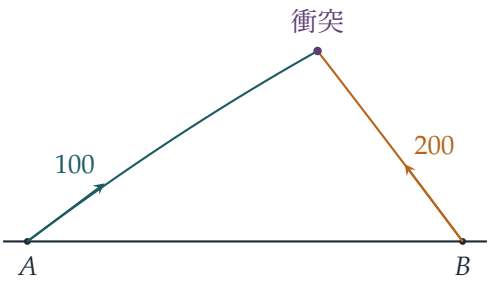
2 発のミサイルはどちらも放物運動をする物体（projectile）なので、任意の時刻における各ミサイルの位置を書き下すことができる。衝突（collision）とは、2 つの位置が同じ時刻に一致することである。これにより、衝突時刻と $T$ の 2 つを未知数とする 2 つの方程式（水平方向と鉛直方向）が得られる。水平方向の方程式は 1 次なので、これを用いて衝突時刻を消去（eliminate）でき、鉛直方向の方程式は $T$ についての 2 次方程式（quadratic equation）になる。そのうえで、どちらの解（root）が物理的に意味をもつかを判断しなければならない。

## 解答

### 設定

2 発のミサイルをどちらも、空気抵抗（air resistance）を受けずに重力のみのもとで自由に運動する質点（particle）としてモデル化する。$A$ を原点とし、$AB$ に沿って $x$ 軸をとり（したがって $B$ は $x = 180$ にある）、鉛直上向きに $y$ 軸をとる。時刻 $t$ は 1 発目のミサイルの発射から秒単位で測る。

1 発目のミサイルについて、$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ から $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ であり、初速度の成分は $100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ と $100 \cdot \frac{3}{5} = 60$ である。2 発目については、$\sin\beta = \frac{4}{5}$ から $\cos\beta = \frac{3}{5}$ である。これは $A$ に向かって進むので、成分は $-200 \cdot \frac{3}{5} = -120$ と $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$ である。




$s = t - T$ を 2 発目の発射からの経過時間とする。このとき、両方が飛行中である間は

$$\begin{aligned} &1\text{発目のミサイル：} \quad x = 80t, && y = 60t - 5t^2, \\ &2\text{発目のミサイル：} \quad x = 180 - 120s, && y = 160s - 5s^2. \end{aligned}$$

**衝突**

衝突時には $x$ 座標が一致するので

$$80t = 180 - 120(t - T) \quad \Longrightarrow \quad 200t = 180 + 120T \quad \Longrightarrow \quad t = 0.9 + 0.6T,$$

であり、したがって $s = t - T = 0.9 - 0.4T$ である。

$y$ 座標も一致するので $60t - 5t^2 = 160s - 5s^2$、すなわち $t - s = T$ を用いて

$$60t - 160s = 5(t^2 - s^2) = 5(t - s)(t + s) = 5T(t + s),$$

となる。$t$ と $s$ の式を代入すると

$$\begin{aligned} 60t - 160s &= 60(0.9 + 0.6T) - 160(0.9 - 0.4T) = 100T - 90, \\ 5T(t + s) &= 5T(1.8 + 0.2T) = 9T + T^2. \end{aligned}$$

これらを等しいとおくと

$$T^2 - 91T + 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - 1)(T - 90) = 0,$$

となるので、$T = 1$ または $T = 90$ である。

**考えてみよう** どちらの解も方程式を満たす。なぜ $T = 90$ は答えになりえないのだろうか。

$T = 90$ のとき $s = 0.9 - 36 = -35.1$ となる。これは「衝突」が 2 発目のミサイルの発射より 35.1 秒前に起こることを意味する。（さらにその位置は地面よりはるか下である。方程式は実際の飛行の範囲を越えて延長された放物線を表しているのである。）

したがって、この解は物理的ではない。そもそも 1 発目のミサイルが空中にあるのは $2 \cdot 60/10 = 12$ 秒間なので、それよりずっと前に着地しているはずである。

$T = 1$ のとき $t = 1.5$、$s = 0.5 > 0$ となり、両方のミサイルが飛行中である。高さは $60(1.5) - 5(1.5)^2 = 78.75$ と $160(0.5) - 5(0.5)^2 = 78.75$ でどちらも正であり、両ミサイルとも $x = 120$ にある。よって

$$T = 1 \text{ 秒}.$$

## 検算

$T = 1$ を代入し直すと、$t = 1.5\,\mathrm{s}$ において両ミサイルは $(120, 78.75)$ メートルの位置にあり、これは厳密な分数計算でも確かめた。発射の遅れを $1\,\mathrm{s}$ として両方の運動を数値的に時間刻みで追うと、ミサイル間の距離は $t = 1.5\,\mathrm{s}$ で実質的に 0 まで減少する。妥当性の確認として、衝突位置 $x = 120$ は $A$ と $B$ の間にあり、そこでの 1 発目のミサイルの鉛直方向の速度は $60 - 15 = 45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ なので、まだ上昇中である。

## よくある間違い

- 両方のミサイルに同じ時間変数を用いてしまう。2 発目のミサイルの飛行時間は $t$ ではなく $t - T$ である。
- 2 発目のミサイルが $x$ 軸の負の向きに進むことを忘れる。
- $t - T > 0$ を確認せずに $T = 90$ を残してしまう。

## STEP のその先へ

これをもっと鮮やかに見る方法がある。両ミサイルは同じ加速度 $g$ をもつので、両方が飛行中になれば、その**相対速度**（relative velocity）は一定であり、互いに相手が直線運動をしているように見える。衝突が起こるのは、ちょうどその相対速度が時刻 $T$ における両者を結ぶ直線に沿った向きをもつときであり、これを式に書くと同じ 2 次方程式が得られる。このように自由落下する座標系（freely falling frame）に移ることは、アインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）への第一歩である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。