解答例

STEP II 2005、第 1 問

純粋数学 • 多項式と停留点

> **STEP II 2005、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q1

鍵となる考え方

$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ の形の関数を積の微分法（product rule）で微分すると $(P'(x)-2xP(x))\mathrm{e}^{-x^2}$ となり、e^{-x^2} は決して 0 にならないから、停留点（stationary point）はちょうど多項式（polynomial）$P'(x)-2xP(x)$ の実数解である。したがって後半は逆向きの問題になる。すなわち、$P'-2xP$ をどのような多項式にしたいかをまず決め、そこから係数比較（comparing coefficients）によって P へと遡ればよい。

解答

前半

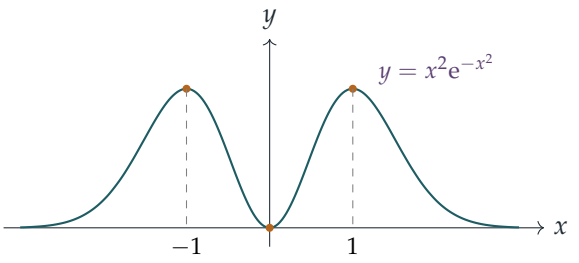
積の微分法により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + x^2\cdot(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

すべての x に対して $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ であるから、これが 0 になるのはちょうど $x(1-x^2)=0$ のとき、すなわち

$$x=0, \qquad x=1, \qquad x=-1$$

のときである。



グラフは原点で極小となり、$x = \pm 1$ で高さ e^{-1} の極大をとる。

後半

任意の多項式 P に対して

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)e^{-x^2}\right) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)e^{-x^2},$$

が成り立つから、やはり $e^{-x^2} > 0$ により、導関数が o になるのはちょうど $P'(x) - 2xP(x) = 0$ となるところである。前半もこの型に当てはまっている。実際、$P(x) = x^2$ からは $P' - 2xP = -2x(x^2 - 1)$ が得られた。そこで

$$P'(x) - 2xP(x) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right), \qquad (*)$$

を目標とする。この右辺の実数解は 0、$\pm a$、$\pm b$ のみである。a と b は相異なる正の数であるから、これらは 5 つの**相異なる**値である。

> **考えてみよう** P の次数はいくつにすべきか。また、なぜ偶数乗の項だけを含むべきなのか。

P の次数（degree）が n、主係数（leading coefficient）が c ならば、P' の次数は $n - 1$ であるから、$P' - 2xP$ は次数 $n + 1$、主係数 $-2c$ となる。$(*)$ の右辺は次数 5、主係数 -2 であるから、$n = 4$ かつ $c = 1$ でなければならない。さらに、右辺は奇関数（odd function）である。P が偶関数ならば P' と $2xP$ はともに奇関数となるから、

$$P(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma.$$

とおいてみるのが自然である。このとき $P'(x) = 4x^3 + 2\beta x$ であり、

$$\begin{aligned} P'(x) - 2xP(x) &= 4x^3 + 2\beta x - 2x^5 - 2\beta x^3 - 2\gamma x \\ &= -2x^5 + (4 - 2\beta)x^3 + (2\beta - 2\gamma)x, \end{aligned}$$

となる。一方、$(*)$ の右辺を展開すると

$$-2x^5 + 2\left(a^2 + b^2\right)x^3 - 2a^2b^2x.$$

となる。x^3 の係数と x の係数を比較すると、

$$\begin{aligned} 4-2\beta &= 2\left(a^2+b^2\right) &\quad\Longrightarrow\quad \beta &= 2-a^2-b^2, \\ 2\beta-2\gamma &= -2a^2b^2 &\quad\Longrightarrow\quad \gamma &= \beta+a^2b^2 = a^2b^2-a^2-b^2+2. \end{aligned}$$

よって、条件を満たす多項式の一つは

$$\boxed{P(x) = x^4+\left(2-a^2-b^2\right)x^2+a^2b^2-a^2-b^2+2.}$$

である。このように選べば $(*)$ は恒等的に（identically）成り立つから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2x\left(x^2-a^2\right)\left(x^2-b^2\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

となり、これは $x=0$、$x=\pm a$、$x=\pm b$ で o になり、$\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$ であるから、それ以外の x では o にならない。P の o でない定数倍も同様に条件を満たす。

検算

- $a=1$、$b=2$ とすると $P(x)=x^4-3x^2+1$ であり、$P'-2xP = 4x^3-6x-2x^5+6x^3-2x = -2x^5+10x^3-8x = -2x(x^2-1)(x^2-4)$ となって、求める形になっている。
- 数値的に確かめると、$a=0.7$、$b=1.9$ のとき、$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ の導関数は $[-5,5]$ 上で $x=0,\pm 0.7,\pm 1.9$ の付近でのみ符号を変える。また、無作為に選んだ数千組の (a,b,x) についても公式が正しいことを確認した。
- 発見的に $b\to 0$ としてみると、$P\to x^4+(2-a^2)x^2+2-a^2$ となり、導関数は $-2x^3(x^2-a^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ となって、0 と $\pm b$ の解が一つに合わさる。

よくある間違い

- 合成関数の微分法（chain rule）による因子を忘れる。e^{-x^2} の導関数は $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ であり、e^{-x^2} ではない。
- 5 つの解に合わせて P の次数を 5 と推測してしまう。$P\mathrm{e}^{-x^2}$ を微分すると次数が 1 つ上がるから、P の次数は 4 である。
- ほかに停留点がない理由を述べない。これには $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$ であることと、5 次式（quintic）がこれらの解しかもたないことが必要である。

STEP のその先へ

写像 $P \mapsto P' - 2xP$ は多項式全体の上の線形作用素（linear operator）であり、$(*)$ を解くことは、積分因子（integrating factor）e^{-x^2} をもつ 1 階線形微分方程式（first-order linear differential equation）を解くことにほかならない。H を多項式として $H(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ の形をした関数を考えると、エルミート（Hermite）多項式（Hermite polynomials）に行き着く。これは確率論（正規分布（normal distribution））や量子調和振動子（quantum harmonic oscillator）に現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）では、積分因子とエルミートの方程式が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。