解答例

STEP I 2005、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP I 2005、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q9

鍵となる考え方

すべては一つの未知数、すなわち一様でない棒の重心（centre of mass）G がどこにあるかにかかっている。最初の二つの設定はいずれも、その位置を用いて T を表す式を与えるので、それらを等置すれば G と T が同時に決まる。その後の傾いた設定は、剛体（rigid body）の標準的な問題である。未知の接触力がはたらく点のまわりのモーメント（moment）をとり、次に力を分解（resolve）すればよい。

解答

棒を剛体とみなし、その重さ W はすべて重心 G にはたらくものとする。また糸は軽く、伸び縮みしない（inextensible）ものとする。$AG = x$ とおくと、$GB = 3l - x$ である。

G の位置を求め、$5T = 2W$ を示す

両端を糸でつるす場合。B のまわりのモーメントをとると、B における未知の張力（tension）が消える。

$$T \cdot 3l = W(3l - x).$$

A から距離 l の点に支点を置き、B を糸でつるす場合。支点（pivot）を P とすると、$PB = 2l$ である。P のまわりのモーメントをとると、支点における未知の抗力が消える。B の糸が棒を支えるためには、G は P に関して B の側になければならない。よって $PG = x - l$ であり、

$$T \cdot 2l = W(x - l).$$

T を消去する（第 1 式を 2 倍、第 2 式を 3 倍して比較する）と、

$$2W(3l - x) = 3W(x - l) \quad \Longrightarrow \quad 9l = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}l.$$

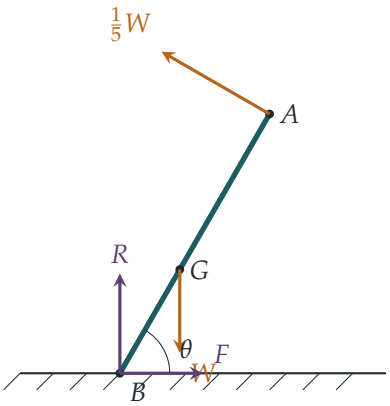
すると第 2 式から $2lT = W \cdot \frac{4}{5}l$ となるので $T = \frac{2}{5}W$、すなわち

$$5T = 2W,$$

となり、示すべき式が得られた。$x = \frac{9}{5}l > l$ であり、これは G が支点より先にあるという仮定と合っていることに注意する。したがって G は B から距離 $GB = 3l - \frac{9}{5}l = \frac{6}{5}l$ の位置にある。

地面に置かれた棒

今度は B が粗い地面の上にあり、棒は水平と角 θ をなし、A の糸は棒に垂直で張力は $\frac{1}{2}T = \frac{1}{5}W$ である。B には上向きの垂直抗力（normal reaction）R と、地面に沿った摩擦力（friction）F がはたらく。



B のまわりのモーメント。これにより R と F が消える。糸の力は B から距離 $3l$ の点で棒に垂直にはたらくので、そのモーメントは $\frac{1}{5}W \cdot 3l$ である。重さは棒に沿って距離 $\frac{6}{5}l$ の点に鉛直にはたらくので、B からその作用線までの垂直距離は $\frac{6}{5}l\cos\theta$ である。よって

$$\tfrac{1}{5}W \cdot 3l = W \cdot \tfrac{6}{5}l\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

したがって $\theta = 60°$（すなわち $\frac{\pi}{3}$）である。

考えてみよう 糸の張力の各成分はどちら向きか。

棒は水平と角 θ をなし、糸は棒と直角をなすので、糸は**鉛直**と角 θ をなす。したがって張力 $\frac{1}{5}W$ の鉛直成分は $\frac{1}{5}W\cos\theta$（上向き）、水平成分は $\frac{1}{5}W\sin\theta$ であり、水平成分

は A の側から離れて B の向こう側を向く。摩擦力はこの水平方向の引きとつり合わなければならないので、図のように B において A の側に向かってはたらく。

鉛直方向に分解すると：

$$R + \tfrac{1}{5}W\cos 60^\circ = W \quad \Longrightarrow \quad R = W - \tfrac{1}{10}W = \tfrac{9}{10}W.$$

水平方向に分解すると：

$$F = \tfrac{1}{5}W\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{10}W.$$

棒が滑らないための条件は $F \le \mu R$、すなわち

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/10}{9/10} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

よって滑りを防ぐ最小の摩擦係数（coefficient of friction）は $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$ である（等号のとき、棒は限界のつり合い（limiting equilibrium）にある）。

検算

- $x = \frac{9}{5}l$ のとき、2 本の糸の設定からは $T = W \cdot \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5}W$、支点の設定からは $T = W \cdot \frac{4/5}{2} = \frac{2}{5}W$ が得られ、当然ながら一致する。
- 傾いた位置で A のまわりのモーメントもとると（$W = l = 1$、$\theta = 60^\circ$、$R = 0.9$、$F \approx 0.1732$ として）、合モーメントはやはり零となり、R と F をまとめて確かめられる。
- 数値的には $\mu_{\min} = \sqrt{3}/9 \approx 0.19245$ であり、力のベクトルを組み立てて三つのつり合いの式をすべて確かめることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 重さのモーメントの腕の長さに $\frac{6}{5}l\sin\theta$ を用いること。B から重さの作用線までの水平距離は $\frac{6}{5}l\cos\theta$ である。
- 棒に垂直な糸に鉛直成分があることを忘れて、$R = W$ としてしまうこと。こうすると $\mu = \sqrt{3}/10$ となり、小さすぎる。
- 棒が一様であると仮定して、G を中点に置いてしまうこと。前半の要点はまさに G の位置を求めることにある。

STEP のその先へ

つり合いの測定から重心の位置を求めることは、ある強力な考え方の静的な形である。すなわち、ある点のまわりの力の系のモーメントは、ただ一つの合力（resultant）を除いて、その系を決定する。大学ではこれが剛体の静力学（statics）、さらに動力学（dynamics）の学習へと発展し、そこでは重心と慣性モーメント（moment of inertia）が物体の運動を支配する二つの量となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、トルク（torque）と剛体を扱っており、この種のより難しい問題が豊富に収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。