解答例

STEP I 2005、第 8 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP I 2005、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q8

鍵となる考え方

冒頭の恒等式（identity）は、$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky^2 + (\text{ある}x\text{だけの式})$ という形の方程式を見抜くための処方箋である。方程式がこの形になれば、置換（substitution）$y^2 = x^k f(x)$ によって y^2 の項が打ち消し合い、$f'(x)$ が x の関数に等しいという式が残るので、あとはそれを積分するだけである。必要な作業は、k を選ぶことと、小問 (ii) で左辺が $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ になるように全体を割ることだけである。

解答

恒等式

$y^2 = x^k f(x)$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）し、右辺には積の微分法則（product rule）を用いる：

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}f(x) + x^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

両辺に x を掛けると、

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\,x^k f(x) + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = ky^2 + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

となる。ここで $x^k f(x) = y^2$ を用いた。これが求める結果である。

小問 (i)

$k=1$ として $y^2=xf(x)$ とおくと、恒等式より $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^2f'(x)$ である。与えられた方程式と比べると y^2 の項は一致するので、方程式が成り立つのはちょうど

$$x^2f'(x)=x^2-1, \qquad \text{すなわち、} \qquad f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \quad (x\neq 0).$$

のときである。積分すると $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+c$ となるので、

$$y^2=xf(x)=x^2+cx+1.$$

$x=1$ のとき $y=2$ という条件から $4=1+c+1$ となり、$c=2$ であるから

$$y^2=x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

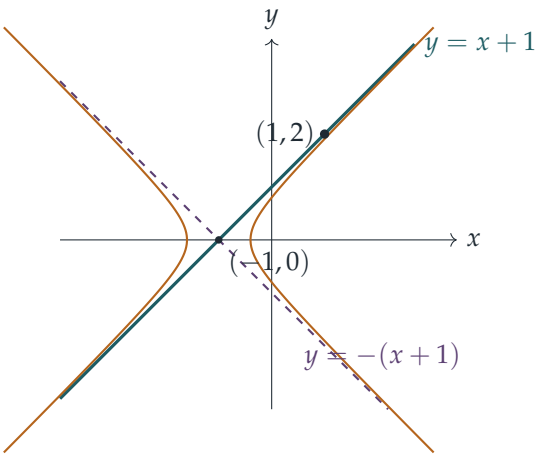
よって $y=x+1$ または $y=-(x+1)$ である。このうち $(1,2)$ を通るのは $y=x+1$ だけなので、解は

$$y=x+1.$$

である。(代入して確かめると、$2x(x+1)\cdot 1=2x^2+2x$ かつ $(x+1)^2+x^2-1=2x^2+2x$ であるから、途中で割り算をした $x=0$ も含め、すべての x で方程式を満たす。)

考えてみよう 答えが単に $y=x+1$ であるとき、「幾何学的に説明せよ」は何を求めているのだろうか。

解曲線は直線である。すなわち、$(-1,0)$ と $(0,1)$ を通る傾き 1 の直線であり、x 軸と 45° の角をなす。これがなぜ少々意外なのかを述べておく価値がある。一般解（general solution）$y^2-x^2-cx=1$ は円錐曲線（conic）の族である。平方完成（completing the square）をすると $y^2-(x+\frac{c}{2})^2=1-\frac{c^2}{4}$ となり、これは $(-\frac{c}{2},0)$ を中心とし、$y=\pm(x+\frac{c}{2})$ を漸近線（asymptote）とする直角双曲線（rectangular hyperbola）である。初期条件（initial condition）は $c=2$ を選び出すが、これは右辺が零となり、双曲線が自身の漸近線の組 $y=\pm(x+1)$ に退化（degenerate）する場合である。我々の解は、その組のうちの $y=x+1$ という分枝である。



実線が解であり、破線は $y^2=(x+1)^2$ のもう一方の半分である。琥珀色の曲線は、族のうち退化していないものの概形を描いたもので、このような 2 直線を漸近線として近づいていく直角双曲線である。

小問 (ii)

恒等式を使うには左辺に $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が必要なので、方程式を x で割る（$\ln x$ の項があるので $x>0$ でなければならず、この割り算は問題ない）：

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2+\frac{2\ln x}{x}.$$

y^2 の係数は -1 であるから、$k=-1$、すなわち $y^2=f(x)/x$ とおく。すると $x^{k+1}=x^0=1$ であり、恒等式は $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2+f'(x)$ となる。比較すると、

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2=\frac{2\ln x}{x}$ であるから、$f(x)=(\ln x)^2+c$ が得られ、したがって

$$y^2=\frac{(\ln x)^2+c}{x}.$$

$x=1$ で $y=1$ であるから $1=(0+c)/1$ となり、$c=1$ である。$x=1$ で $y=1>0$ であり、しかも y は決して零にならない（分子 $1+(\ln x)^2$ は 1 以上である）ので、正の平方根をとって、解は

$$y=\sqrt{\frac{1+(\ln x)^2}{x}},\qquad x>0.$$

である。

検算

- (i) では、上で見たように直線 $y = x + 1$ を方程式に直接代入して確かめられる。また、$(1, 2)$ から方程式を数値的に積分する（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta））と、$x = 2$ で $y = 3.000$、$x = 5$ で $y = 6.000$ となる。
- (ii) では、$y^2 = (1 + (\ln x)^2)/x$ から $y(3) \approx 0.8577$、$y(0.2) \approx 4.2369$ が得られる。$(1, 1)$ から微分方程式（differential equation）を数値積分すると、小数点以下何桁にもわたって一致する。
- 恒等式そのもの：$k = 0$ を試してみよ。このとき恒等式は $2xy\,y' = xf'$ に帰着し、これは $(y^2)' = f'$ に x を掛けたものにすぎない。

よくある間違い

- (ii) で、習慣的に $k = 1$ を使ってしまうこと。x で割った後の y^2 の項の符号によって $k = -1$ が定まるのである。
- (ii) で x で割るのを忘れ、$2x^2 y\,y'$ を恒等式に合わせようとしてしまうこと。
- (i) の答えを $y^2 = (x + 1)^2$ のままにして、$(1, 2)$ を通る分枝を選ばないこと。

STEP のその先へ

ここでの置換は、標準的な技法を姿を変えて用いたものである。$u = y^2$ とおくと、$2xy\,y' = ky^2 + g(x)$ は**線形**（linear）方程式 $xu' - ku = g(x)$ になり、x^{-k} がその積分因子（integrating factor）である。べき乗の置換によって線形になる方程式はベルヌーイ方程式（Bernoulli equations）と呼ばれ、大学の常微分方程式（ODE）の講義で最初に出会う非線形方程式の一つである。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、積分因子や完全微分方程式（exact equations）と並べてこれらが扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。