解答例

STEP I 2005、第 7 問

純粋数学 • 望遠鏡型の積

> **STEP I 2005、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q7

鍵となる考え方

3 つの積はいずれも**次々に打ち消し合う**（telescope）。各因数を比 $g(r+1)/g(r)$ の形、あるいはそのような比の積の形に書けば、ほとんどすべてが約分されて消え、最初と最後の値だけが残る。小問 (i) と (ii) はこの仕組みを示す準備運動である。小問 (iii) では、三角関数の因数が実はそのような比になっていることを見抜くのが仕事である。共通の分母 $\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$ で通分すると、分子は加法定理（compound angle formula）による正弦の形になる。

解答

小問 (i)

積を書き下すと

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}.$$

各分子が次の因数の分母と約分されるので、最後の分子と最初の分母だけが残る：

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{n+1}{1}=n+1.$$

小問 (ii)

分子を $r^2-1=(r-1)(r+1)$ と因数分解し、各因数を 2 つに分ける：

$$\frac{r^2-1}{r^2}=\frac{r-1}{r}\times\frac{r+1}{r}.$$

積の積は因数全体の積であるから、2 つの系列を別々に扱ってよい（ここで $n \geq 2$ である）：

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r-1}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$
$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r+1}{r} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

どちらも小問 (i) とまったく同じように打ち消し合う。これらを掛け合わせると

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

小問 (iii)

$\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$、$\beta_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{n}$ とおく。すると第 r 因数は $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r$ である。

考えてみよう $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta$ は、どのようにすれば似た形の 2 つのものの比になるだろうか？

$\cot\beta = \cos\beta / \sin\beta$ と書いて通分する。すると分子は加法定理の展開式そのものになる：

$$\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

これには $\sin\beta_r \neq 0$ が必要であり、n が偶数であるという条件を使うのはまさにここである。$\sin\beta_r = 0$ となるのは $(2r-1)/n$ が整数である場合に限られる。しかし $2r-1$ は奇数で n は偶数であるから、奇数が n の倍数になることはない。したがってすべての因数が定義され、以下に現れる分母はすべて 0 でない。

さて $\alpha + \beta_r = \dfrac{2\pi + (2r-1)\pi}{n} = \dfrac{(2r+1)\pi}{n} = \beta_{r+1}$ であるから

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r = \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r}.$$

これは $g(r) = \sin\beta_r$ とした小問 (i) とちょうど同じ形である。積は次々に打ち消し合う：

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \times \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} \times \cdots \times \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_n}$$
$$= \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin(2\pi + \frac{\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

sin は周期 2π をもつので分子は分母に等しく、

$$\prod_{r=1}^{n} \left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} \cot\tfrac{(2r-1)\pi}{n}\right) = 1.$$

検算

- 小問 (i) で $n = 3$ のとき：$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 = n + 1$。
- 小問 (ii) で $n = 2$ のとき：因数は 1 つだけで $\frac{3}{4}$ であり、$\frac{n+1}{2n} = \frac{3}{4}$ である。$n \to \infty$ とすると積は $\frac{1}{2}$ に近づく。これはよく知られた無限積（infinite product）である。
- 小問 (iii) で $n = 4$ のとき：$\cos\frac{\pi}{2} = 0$、$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ であるから、因数は $\cot\frac{\pi}{4}$、$\cot\frac{3\pi}{4}$、$\cot\frac{5\pi}{4}$、$\cot\frac{7\pi}{4}$、すなわち 1、-1、1、-1 であり、積は 1 である。また、60 以下のすべての偶数 n について、積が（10^{-8} 以内の誤差で）1 に等しいことを数値的にも確かめた。
- n が奇数ならば、$r = \frac{n+1}{2}$ の因数に $\cot\pi$ が現れ、これは定義されない。条件が課されている理由はこれである。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、打ち消しを $r = 1$ から始めてしまう：下端は 2 なので、最初の因数は $\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{2}$ である。
- 小問 (iii) で、$\sin\frac{(2n+1)\pi}{n} \big/ \sin\frac{\pi}{n}$ で止めてしまい、周期性（periodicity）を使って 1 に簡約しない。
- 「n が偶数」という条件をどこで使うのかを説明しない。この条件こそが、すべての余接（cotangent）とすべての分母をきちんと定義されたものにしている。

STEP のその先へ

このように打ち消し合う積は、部分分数分解（partial fractions）で出会う、次々に打ち消し合う和の乗法版である。対数（logarithm）をとると一方が他方に移る。小問 (ii) は無限積 $\prod_{r\geq 2}(1 - 1/r^2) = \frac{1}{2}$ の有限版である。このような無限積や、オイラー（Euler）の積

$$\sin\pi x = \pi x \prod_{r\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

は、大学最初の解析学（analysis）の講義で本格的に学ぶ。そこでは積の収束（convergence）は対数の和の収束を通して定義される。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、そのために必要となる収束の考え方を身につけるのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。