解答例

STEP I 2005、第 6 問

純粋数学 • アポロニウスの円

> **STEP I 2005、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q6

鍵となる考え方

$AP = 2BP$ のような条件には平方根が含まれるので、まず両辺を 2 乗する。距離の 2 乗は多項式であり、しかも $x^2 + y^2$ の項は両辺で同じ係数をもつ。これが軌跡（locus）が円になる理由である。小問 (ii) では、x 軸上の一般の 2 点について同じことを行う。すると、$x^2 + y^2 + px + q = 0$ の形の 2 つの方程式が同じ円を表すのは、p と q がそれぞれ一致するときであり、かつそのときに限る。係数比較（comparing coefficients）により k^2 の 2 通りの表し方が得られ、k を消去すると両方の結果が得られる。

解答

小問 (i)

どちらの長さも非負であるから、$AP = 2BP$ は $AP^2 = 4BP^2$ と同値である：

$$(x-5)^2 + (y-16)^2 = 4[(x+4)^2 + (y-4)^2].$$

展開すると、

$$x^2 - 10x + y^2 - 32y + 281 = 4x^2 + 32x + 4y^2 - 32y + 128.$$

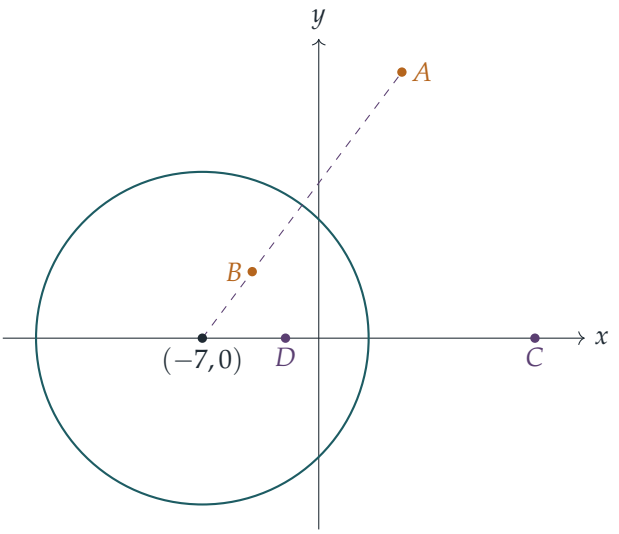
y の項は打ち消し合い、すべてを右辺に集めると

$$3x^2 + 42x + 3y^2 - 153 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0.$$

平方完成（completing the square）すると $x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$ であるから、

$$(x+7)^2 + y^2 = 100,$$

となり、示すべき式が得られた。軌跡は中心 $(-7, 0)$、半径 10 の円である。



（点 $C = (13, 0)$ と $D = (-2, 0)$ は、小問 (ii) における $k = 2$ の場合の組の一例である。A、B と中心も同一直線上にあることに注意しよう。）

小問 (ii)

先ほどと同様に、$QC = kQD$ は $QC^2 = k^2 QD^2$ と同値である。$Q = (x, y)$ とおくと、

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2[(x-b)^2 + y^2].$$

項を右辺に集めると、

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2 b - a)x + (k^2 b^2 - a^2) = 0.$$

$k > 1$ より $k^2 - 1 \neq 0$ であるから、これで割ることができる：

$$x^2 + y^2 - \frac{2(k^2 b - a)}{k^2 - 1}\, x + \frac{k^2 b^2 - a^2}{k^2 - 1} = 0.$$

? **考えてみよう** なぜ $x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0$ と係数を比較してよいのだろうか？

方程式 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ は $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$ と書き直せる。これが中心 $(-7, 0)$、半径 10 の円であるならば、中心の条件から $p = 14$ が、半径の条件から $\frac{1}{4}p^2 - q = 100$ が導かれ、したがって $q = -51$ である。円の中心と半径はただ 1 つに定まるので、2 つの方程式の p も q も一致しなければならない。

x の係数を比較すると：

$$\frac{k^2 b - a}{k^2 - 1} = -7 \implies k^2 b - a = -7k^2 + 7 \implies k^2(b+7) = a + 7.$$

定数項を比較すると：

$$\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=-51 \implies k^2b^2-a^2=-51k^2+51 \implies k^2(b^2+51)=a^2+51.$$

ここで $b^2+51>0$ であり、また $b+7\neq 0$ である。実際、$b=-7$ ならば 1 つ目の式から $a=-7=b$ となるが、これは除外されている。よって両者で割ることができ、k^2 の 2 通りの表し方が得られる：

$$\frac{a+7}{b+7}=k^2=\frac{a^2+51}{b^2+51},$$

これが 1 つ目の結果である。

2 つ目の結果を示すために、分母を払う：

$$(a+7)(b^2+51)=(b+7)(a^2+51).$$

展開すると、定数 357 が両辺で打ち消し合い、次の式が残る：

$$ab^2+51a+7b^2=a^2b+51b+7a^2.$$

各項に $a-b$ が現れるように項をまとめる：

$$\begin{aligned}0&=(a^2b-ab^2)-51(a-b)+7(a^2-b^2)\\&=(a-b)[ab-51+7(a+b)].\end{aligned}$$

$a\neq b$ であるから $a-b$ で割ることができ、

$ab+7a+7b=51$, よって $ab+7a+7b+49=100$, すなわち $(a+7)(b+7)=100$,

となり、示すべき式が得られた。

検算

- $b=-2$ としてみる。このとき $b+7=5$ であるから $a+7=20$、$a=13$ となり、$k^2=20/5=4$ である。点 $(3,0)$ は円上にあり、$QC=10=2\times 5=2\,QD$ である。点 $(-17,0)$ も円上にあり、$QC=30=2\times 15$ である。
- 小問 (i) において、点 $(3,0)$ では $AP=\sqrt{4+256}=\sqrt{260}$、$BP=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$ であり、確かに $\sqrt{260}=2\sqrt{65}$ である。
- さらに、$(a+7)(b+7)=100$ を満たす多くの組について、円上のランダムな点が $QC=kQD$ を満たすこと、そして 1 つ目の結果を満たす $a\neq b$ のすべての組が 2 つ目の結果も満たすことを数値的に確認した。

よくある間違い

- $k^2 - 1$ で割る前に係数を比較してしまうこと。2 つの方程式は全体の定数倍の違いを除いて一致すればよいのである。
- $b + 7$ が 0 でないことを確かめずにそれで割ってしまうこと。
- 因数 $a - b$ を見落とすこと。これこそが、問題文が除外している自明な解 $a = b$ に対応している。

STEP のその先へ

2 つの定点からの距離の比が一定値 $k \neq 1$ である点の軌跡は**アポロニウスの円**（circle of Apollonius）である。結果 $(a+7)(b+7) = 100$ は、M を中心、r を半径とするとき、C と D が中心から見て同じ側にあり、$MC \cdot MD = r^2$ を満たすことを意味している。すなわち、C と D はこの円に関する**反転の対称点**（inverse points）である。（A と B も同様である：$MA = 20$、$MB = 5$。）円に関する反転は、幾何学においても、複素解析（complex analysis）においても強力な道具である。複素解析では、反転は写像 $z \mapsto 1/\bar{z}$ にあたる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）に見事な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。