解答例

STEP I 2005、第 5 問

純粋数学 ・ 累乗の積分

STEP I 2005、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q5

鍵となる考え方

$x+1$ のべきは合成関数の微分法の逆（reverse chain rule）により $\int (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$ と積分できるが、例外が一つある。$n=-1$ のとき、答えは対数（logarithm）になるのである。したがって、ここでの場合分け（case split）はすべて「べき指数が -1 になるのはいつか」という問いから生じる。(ii) では、余分な因数 x を $x=(x+1)-1$ と書いて取り除く。すると単純なべきが二つ残り、そのため m の例外的な値は**二つ**になる。

解答

小問 (i)

$k \neq 0$ ならば、べき指数 $k-1$ は -1 ではないから、

$$\int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^k}{k}\right]_0^1 = \frac{2^k-1}{k}.$$

$k=0$ ならば、被積分関数（integrand）は $\frac{1}{x+1}$ であり、$[0,1]$ 上で $x+1>0$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

考えてみよう $k \neq 0$ のときの答えが、$k=0$ のときの答えと関係するのはなぜだろうか。

k が 0 から少しだけ動いても、**被積分関数**はほとんど変わらないからである。$0 \leq x \leq 1$

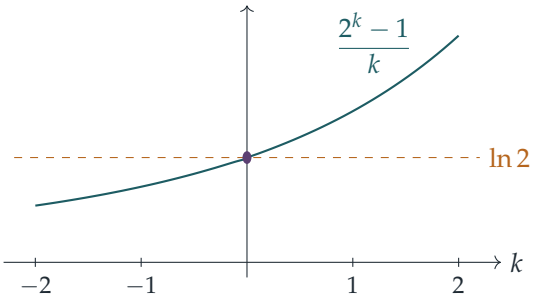
に対して

$$\left|(x+1)^{k-1}-(x+1)^{-1}\right| = \frac{\left|(x+1)^k-1\right|}{x+1} \le \left|2^k-1\right|,$$

が成り立つ。$1 \le x+1 \le 2$ より $(x+1)^k$ は 1 と 2^k の間にあるからである。長さ 1 の区間で積分すると、二つの積分の差は高々 $|2^k-1|$ であり、これは $k \to 0$ のとき 0 に収束する。よって、$k \approx 0$（かつ $k \neq 0$）に対して

$$\frac{2^k-1}{k} = \int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 (x+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

となり、求める結果が得られる。言い換えれば、$k \neq 0$ に対する式は $k=0$ に「穴」をもち、$k=0$ の積分がその穴をちょうど埋めるのである。



小問 (ii)

$x = (x+1)-1$ と書くと、

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1} - (x+1)^m.$$

各項は $x+1$ のべきであり、それを積分して対数が現れるのは、ちょうどそのべき指数が -1 のときである。それは $m+1=-1$ または $m=-1$ のときに起こるから、場合は $m=-1$、$m=-2$、およびそれ以外である。

一般の場合、 $m \neq -1, -2$。

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^{m+2}}{m+2} - \frac{(x+1)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{2^{m+2}-1}{m+2} - \frac{2^{m+1}-1}{m+1}.$$

通分すると分子は

$$(m+1)\left(2^{m+2}-1\right) - (m+2)\left(2^{m+1}-1\right) = 2^{m+1}\left(2(m+1)-(m+2)\right)+1 = m\,2^{m+1}+1,$$

となるから、

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m\,2^{m+1}+1}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \neq -1, -2.$$

$m=-1$ の場合。

$$\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[x-\ln(x+1)\Big]_0^1 = 1-\ln 2.$$

$m=-2$ の場合。

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2+\tfrac{1}{2}-1 = \ln 2-\tfrac{1}{2}.$$

考えてみよう 一般の式は $m=-1$ と $m=-2$ で $0/0$ になる。これは矛盾だろうか。

そうではない。これはまた小問 (i) と同じ状況である。$m=-1$ では分子は $-1\cdot 2^0+1=0$、$m=-2$ では $-2\cdot 2^{-1}+1=0$ となるので、式はそこで誤っているのではなく定義されないだけである。そして小問 (i) と同様に、その極限値（limiting value）が特別な場合の答え（$1-\ln 2\approx 0.307$ および $\ln 2-\frac{1}{2}\approx 0.193$）になっている。

検算

- $m=0$：$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$ であり、式からは $\frac{0+1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ が得られる。$m=1$ のとき：$\int_0^1 (x^2+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ であり、式からは $\frac{4+1}{6}$ が得られる。
- 数値的には、$k=10^{-4}$ とすると $\frac{2^k-1}{k}\approx 0.693171$ となり、$\ln 2\approx 0.693147$ と比べられる。
- 多くの k と m の値（$m=-1,-2$ を含む）について、すべての積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、10^{-9} の精度で式と一致する。一般の式に $m=-1\pm 10^{-5}$ を代入すると $0.30685\ldots$ となり、$1-\ln 2$ と一致する。

よくある間違い

- $k=0$ に対して $\frac{(x+1)^0}{0}$ と書いてしまう。あるいは、(ii) では m の例外的な値が一つではなく**二つ**あることを見落とす。
- (ii) で部分積分（integration by parts）を行い、$m=-1$ のときにそれが破綻することに気づかないまま $m+1$ で割ってしまう。
- $m=-2$ の場合に、$\int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x=-(x+1)^{-1}$ の符号を間違える。

STEP のその先へ

(i) での推論は $\lim_{k\to 0}\frac{2^k-1}{k}=\ln 2$ を意味しており、これは $k=0$ における 2^k の微分係数（derivative）である。ここで使った一般的な事実は、被積分関数が**一様に**収束するならば、その積分も収束するというものである。これは大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な定理であり、一様性がなければ成り立たない。同じ考え方によって、$n\to -1$ のとき $\int x^n\,\mathrm{d}x$ が $\ln x$ に「なる」理由も説明できる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、一様収束（uniform convergence）と積分を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。