解答例

STEP I 2005、第 4 問

純粋数学 ・ 倍角の公式

> **STEP I 2005、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q4

鍵となる考え方

どちらの小問も倍角（multiple angles）に関する問題である。(i) で実際に判断が必要なのは $\sin\theta$ の符号だけであり、それは与えられた範囲によって決まる。あとは 2 倍角の公式と 3 倍角の公式（double- and triple-angle formulae）が仕事をしてくれる。(ii) では $\tan 3\theta$ を $\tan(2\theta+\theta)$ として組み立てる。すると「これを用いて（hence）」の部分は $t=\tan\theta$ についての三次方程式（cubic）に帰着する。STEP の問題に現れる三次方程式には、ほぼ必ず見つけやすい解があり、どの解を残すべきかは θ の範囲が教えてくれる。

解答

小問 (i)

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であるから、

$$\sin^2\theta = 1-\tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}, \qquad \text{よって} \qquad \sin\theta = \pm\tfrac{4}{5}.$$

$\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$ のとき、θ は第 4 象限（fourth quadrant）にあり、そこでは $\sin\theta\le 0$ である。したがって $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ であり、

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

となって、示すべき式が得られた。

$\cos 3\theta$ を求めるには 3 倍角の公式が必要である。$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) &= \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= (2c^2 - 1)c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

$c = \frac{3}{5}$ を代入すると、

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \frac{27}{125} - \frac{9}{5} = \frac{108 - 225}{125} = -\frac{117}{125}.$$

（ここでは $\sin\theta$ の符号は関係しない。$\cos 3\theta$ は $\cos\theta$ だけで決まるからである。）

小問 (ii)

恒等式。$t = \tan\theta$ とおく。2 倍角の公式より $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1 - t^2}$ であり、加法定理（addition formula）より

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1 - t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1 - t^2}}.$$

分子と分母に $1 - t^2$ を掛けると、

$$\tan 3\theta = \frac{2t + t(1 - t^2)}{(1 - t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

となり、これが求める恒等式（identity）である。この導出には $\tan 2\theta$ が存在すること、すなわち $t^2 \neq 1$ が必要である。$t = \pm 1$ のときは直接確かめられる。たとえば $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、右辺は $\frac{3-1}{1-3} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$ であり、$t = -1$ の場合は符号を反転させれば同様である。

$\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ **を解く**。恒等式より、

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{11}{2} \quad \Longrightarrow \quad 6t - 2t^3 = 11 - 33t^2 \quad \Longrightarrow \quad 2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = 0.$$

分母を払ってよいのは、ここでは $1 - 3t^2 \neq 0$ だからである。もしこれが 0 なら、$\tan 3\theta$ は定義されず、$\frac{11}{2}$ にはなりえない。

考えてみよう $2t^3 - 33t^2 - 6t + 11$ の根はどうやって見つければよいだろうか？

既約分数で表した有理数解（rational root）p/q は、p が 11 の約数、q が 2 の約数でなければならない。したがって $\pm1, \pm11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$ だけを試せばよい。$t = \frac{1}{2}$ を試すと、

$$2 \cdot \tfrac{1}{8} - 33 \cdot \tfrac{1}{4} - 3 + 11 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{33}{4} + 8 = 0.$$

よって $2t - 1$ は因数であり、係数を比較すると

$$2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = (2t - 1)(t^2 - 16t - 11).$$

この二次式の根は $t = 8 \pm \sqrt{64 + 11} = 8 \pm 5\sqrt{3}$ である。したがって候補は次の 3 つである。

$$t = \tfrac{1}{2}, \qquad t = 8 + 5\sqrt{3} \approx 16.66, \qquad t = 8 - 5\sqrt{3} \approx -0.66.$$

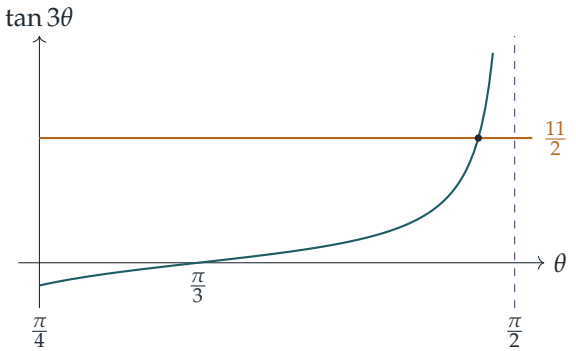
これらは、$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に属する角のうち、その 3 倍の正接が $\frac{11}{2}$ となる 3 つの角に対応している。

ここで範囲を用いる。tan は $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ で増加し、$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ であるから、$t \geq 1$ でなければならない（$\theta = \frac{\pi}{2}$ そのものは、そこで $\tan\theta$ が定義されないので除かれる）。条件を満たす候補は 1 つだけである。

$$\tan\theta = 8 + 5\sqrt{3}.$$

残りの 2 つは三次方程式の正真正銘の解であるが、範囲外の角に対応する。実際、$\frac{1}{2} < 1$ であり、$8 - 5\sqrt{3} < 0$ である。

グラフを見ると、解がちょうど 1 つであることが確かめられる。θ が $\frac{\pi}{4}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、3θ は $\frac{3\pi}{4}$ から $\frac{3\pi}{2}$ まで動き、その区間で $\tan 3\theta$ は -1 から $+\infty$ まで連続的に増加する。したがって $\frac{11}{2}$ とちょうど 1 回だけ交わる。



検算

- (i) では $\theta = 2\pi - \arccos\frac{3}{5} \approx 5.3559$ であり、電卓で計算すると $\sin 2\theta = -0.96$、$\cos 3\theta = -0.936 = -\frac{117}{125}$ となる。

- (ii) では $\theta = \arctan(8+5\sqrt{3}) \approx 1.5108$ であり、これは $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ と $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ の間にあり、$\tan 3\theta \approx 5.5000$ となる。
- 恒等式の簡単な確認：$\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき $t = 2-\sqrt{3}$ であり、右辺を整理すると $1 = \tan\frac{\pi}{4}$ となる。

よくある間違い

- (i) で $\sin\theta = +\frac{4}{5}$ としてしまうこと。これでは $\sin 2\theta$ の符号が逆になる。
- (ii) で、最初に見つけた解だからという理由で $t = \frac{1}{2}$ で止まってしまうこと。これは三次方程式の解ではあるが、$\arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$ である。

STEP のその先へ

三次方程式が 3 つの解をもったのは、$\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ において、$\frac{\pi}{3}$ ずつ離れた 3 つの解 θ をもつからである。同じ仕組みを逆向きに使うのが、三次方程式の古典的な三角関数による解法（trigonometric solution of cubics）である。さらに一般に、ド・モアブル（de Moivre）の定理を用いると、$\tan n\theta$ は $\tan\theta$ の多項式の比として表され、その多項式の根は等間隔に並んだ角の正接になる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、倍角の公式がなぜ $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ からこれほど自然に導かれるのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。