解答例

STEP I 2005、第 3 問

純粋数学 ・ 分数方程式

> **STEP I 2005、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q3

鍵となる考え方

両辺に $(x-a)(x-b)$ を掛けて、それぞれの方程式を多項式（polynomial）の方程式に直し、その実数解（real root）の個数を数える。注意を要するのは、分母を払うことによって、もとの方程式では許されない「解」$x=a$ や $x=b$ が原理的には紛れ込みうるという点であり、そのようなことが決して起こらないことを確かめなければならない。小問 (ii) では、2 次方程式が重解（repeated root）をもつのはちょうど判別式（discriminant）がゼロのときであり、そこから条件が得られる。

解答

小問 (i)

$x \neq a, b$ のとき $(x-a)(x-b)$ を掛けてよく、方程式は次と同値である。

$$\begin{aligned} x(x-b)+x(x-a) &= (x-a)(x-b) \\ 2x^2-(a+b)x &= x^2-(a+b)x+ab \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

a と b は同符号なので $ab>0$ であり、したがってこの方程式は相異なる 2 つの実数解 $x=\sqrt{ab}$ と $x=-\sqrt{ab}$ をもつ。

これらが許される値であることも確かめておく必要がある。もし $x=a$ が解であれば $a^2=ab$ となり、$a\neq 0$ よりこれは $a=b$ を意味するが、これは成り立たない。同様に $x=b$ も解ではない。よって 2 つの解はいずれも本当の解であり、方程式はちょうど 2 つの相異なる実数解 $x=\pm\sqrt{ab}$ をもつ。

小問 (ii)

ここでも $x \neq a, b$ のとき $(x-a)(x-b)$ を掛けると

$$2x^2 - (a+b)x = (1+c)(x^2 - (a+b)x + ab),$$

となり、整理すると

$$q(x) \equiv (1-c)x^2 + c(a+b)x - (1+c)ab = 0.$$

を得る。$c \neq 1$ なので最高次の係数（leading coefficient）は0でなく、これは確かに2次方程式である。

考えてみよう q の解のどれかが a や b になってしまい、捨てなければならないということはありうるだろうか。

代入して確かめてみる。

$$q(a) = (1-c)a^2 + c(a+b)a - (1+c)ab = a^2 - ab = a(a-b),$$
$$q(b) = b^2 - ab = b(b-a)$$

（c を含む項は打ち消し合う）。a, b は0でなく互いに異なるので、どちらも0ではない。よって a と b が q の解になることはない。これは、q のどの実数解ももとの方程式の解であり、その逆も成り立つことを意味する。

q の判別式は

$$\begin{aligned}\Delta &= c^2(a+b)^2 + 4(1-c)(1+c)ab \\ &= c^2[(a+b)^2 - 4ab] + 4ab \\ &= c^2(a-b)^2 + 4ab.\end{aligned}$$

である。$c^2 = -\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$ ならば（$a \neq b$ なので $(a-b)^2$ で割ってよい）、$\Delta = 0$ となる。このとき2次方程式はちょうど1つの（重解である）実数解

$$x = -\frac{c(a+b)}{2(1-c)},$$

をもち、上の確認によりこの解は a でも b でもない。よって、方程式は求めるとおりちょうど1つの実数解をもつ。（実際には逆（converse）も成り立つ。$\Delta > 0$ ならば解は2つ、$\Delta < 0$ ならば解は存在しないので、この条件は必要条件でもある。）

条件の書き換え。 通分すると

$$1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{-4ab}{(a-b)^2},$$

となるので、条件は求めるとおり $c^2 = 1 - \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$ である。

$0 < c^2 \leq 1$ **を導く。** 平方 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$ は非負であるから、2 番目の形から $c^2 \leq 1$ が得られる。1 番目の形からは $c^2 = -4ab/(a-b)^2$ が得られる。$ab \neq 0$ なのでこれは 0 でなく、実数 c に対して $c^2 \geq 0$ であるから、$c^2 > 0$ となる。（このことから $ab < 0$、すなわち a と b が異符号であることもわかり、小問 (i) とも整合する。）以上より、条件が成り立ちうるのは $0 < c^2 \leq 1$ のときに限られる。

上限の値は実際にとられる。$c^2 = 1$ となるのはちょうど $a + b = 0$ のときであり、そのとき（$c \neq 1$ なので）$c = -1$ である。

検算

- $a = 4, b = -1$ とする。このとき $c^2 = 16/25$ であり、$c = \frac{4}{5}$ を選ぶ。重解は $x = -\frac{4}{5} \cdot 3/(2 \cdot \frac{1}{5}) = -6$ であり、実際に $\frac{-6}{-10} + \frac{-6}{-5} = 0.6 + 1.2 = 1.8 = 1 + c$ が成り立つ。
- 極端な場合 $a = 1, b = -1, c = -1$ では $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = 0$、すなわち $2x^2 = 0$ となり、解は $x = 0$ の 1 つだけである。
- 小問 (i) で $a = 1, b = 4$ とすると $x = \pm 2$ となり、$\frac{2}{1} + \frac{2}{-2} = 1$ および $\frac{-2}{-3} + \frac{-2}{-6} = 1$ が成り立つ。

よくある間違い

- 分母を払った後、解が a や b でないことの確認を忘れる。この問題では結果的に問題は生じないが、それを示す必要がある。
- c^2 の項をまとめずに判別式を展開してしまう。$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ と書くことで、条件がすっきりと現れる。
- $c^2 > 0$ ではなく $c^2 \geq 0$ と主張してしまう。強い不等号は $ab \neq 0$ から得られる。

STEP のその先へ

左辺は有理関数（rational function）であり、「そのグラフは水平な直線 $y = 1 + c$ と何回交わるか」という問いは、その値域（range）に関する問いである。ここで得られた条件は、この関数の極値（turning-point value）、すなわち水平な直線がグラフにちょうど接する高さを選び出している。多項式がいつ重解をもつかを問うことは判別式へ、さらに一般には終結式（resultant）へとつながり、これらは大学 1 年の代数学に登場する。この種の問題をさらに解きたい人は、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。