解答例

STEP I 2005、第 2 問

純粋数学 • 放物線の接線と法線

> **STEP I 2005、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q2

鍵となる考え方

放物線（parabola）$y^2 = 4x$ を $(t^2, 2t)$ によってパラメータ表示（parametrisation）すると、すべての接線（tangent）と法線（normal）が x と y についての短い一次方程式になる。したがって交点を求めることは、二つの一次の連立方程式を解くことにすぎない。焦点（focus）$(1, 0)$ が PQ 上にあるという条件は、p と q の間の一つのすっきりした関係式に変わり、まさにその関係式こそが P と Q における接線を直交させるのである。そこまでくれば、長方形はほとんどひとりでに描き上がる。

解答

接線と点 R

点 $(t^2, 2t)$ において $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2$ であるから、そこでの C の傾きは $\dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$ である（$t \neq 0$ なので問題ない）。よって P における接線は

$$y - 2p = \frac{1}{p}\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + p^2,$$

であり、同様に Q における接線は $qy = x + q^2$ である。辺々引くと

$$(p - q)\,y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q),$$

となり、$p \neq q$ であるから $p - q$ で割ることができて $y = p + q$ を得る。すると $x = py - p^2 = p(p + q) - p^2 = pq$ である。したがって

$$R = (pq,\ p + q),$$

となり、示すべきことが示された。

法線と点 S

$(t^2, 2t)$ における法線は接線に垂直なので、傾きは $-t$ である。P における法線は

$$y - 2p = -p\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad px + y = 2p + p^3,$$

であり、Q における法線は $qx + y = 2q + q^3$ である。辺々引くと

$$(p - q)\,x = 2(p - q) + (p^3 - q^3) = (p - q)(2 + p^2 + pq + q^2),$$

となるので、再び $p - q \neq 0$ で割って

$$x = p^2 + pq + q^2 + 2, \qquad y = 2p + p^3 - px = -p^2q - pq^2 = -pq\,(p + q).$$

を得る。これらは任意の p と q について成り立つ。ここで追加の条件を用いる。

$(1, 0)$ が PQ 上にあるという条件を用いる

弦 PQ の傾きは

$$\frac{2p - 2q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{p + q}$$

である（$p + q \neq 0$ のとき）。よってその方程式は $y - 2p = \dfrac{2}{p + q}(x - p^2)$ であり、整理すると

$$(p + q)\,y = 2x + 2pq.$$

となる。この形は $p + q = 0$ の場合も含んでおり、そのときは P と Q を通る鉛直な直線 $x = -pq = p^2$ を与える。$(x, y) = (1, 0)$ を代入すると $0 = 2 + 2pq$ となるので

$$pq = -1.$$

である。これを S の座標に代入すると

$$S = (p^2 + q^2 + 2 + pq,\ -pq(p + q)) = (p^2 + q^2 + 1,\ p + q),$$

となり、示すべきことが示された。また、このとき $R = (-1,\ p + q)$ となり、これは準線（directrix）である直線 $x = -1$ 上にあることにも注意しよう。

$PSQR$ が長方形であること

> **考えてみよう** 与えられた四点が長方形をなすことを証明する、最もすっきりした方法は何か。

よい方針は、まず平行四辺形（parallelogram）であること（対角線が互いに他を二等分すること）を示し、次に一つの角が直角であることを示すことである。

平行四辺形であること。 $PSQR$ において対角線は PQ と SR である。$pq = -1$ を用いると

$$R + S = (pq + p^2 + q^2 + 1,\ 2(p + q)) = (p^2 + q^2,\ 2p + 2q) = P + Q,$$

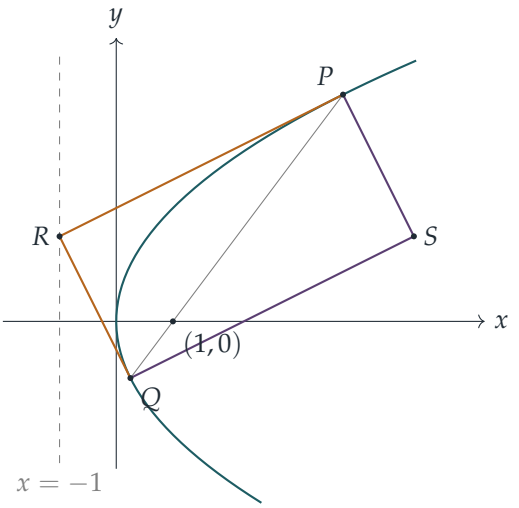
であるから、RS の中点は PQ の中点に一致する。対角線が互いに他を二等分するので、$PSQR$ は平行四辺形である。しかもこれは退化したものではなく、本物の平行四辺形である。実際、P、R、Q は同一直線上にない。なぜなら R は両方の接線上にあり、放物線上の異なる二点における接線はただ一度しか交わらず、どちらの接線ももう一方の接点を通らないからである。

直角があること。 辺 RP と RQ はそれぞれ P と Q における接線上にあり、傾きは $\frac{1}{p}$ と $\frac{1}{q}$ である。その積は

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{pq} = -1,$$

であるから、二本の接線は直交し、角 PRQ は直角である。

一つの角が直角である平行四辺形は長方形（rectangle）であるから、$PSQR$ は長方形である。（同値な言い方をすれば、各法線はそれ自身の接線に垂直なので P と Q における角は直角であり、R における直角と合わせると、四つ目の角も直角でなければならない。）



図は $p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ の場合を示している。接線は琥珀色、法線はプラム色、焦点弦（focal chord）PQ は灰色で描いてある。

検算

$p = 2$、$q = -\frac{1}{2}$ とすると $pq = -1$ である。このとき $P = (4,4)$、$Q = (\frac{1}{4}, -1)$ であり、これらを通る直線 $y - 4 = \frac{4}{3}(x - 4)$ は確かに $(1,0)$ を通る。公式からは $R = (-1, \frac{3}{2})$、$S = (\frac{21}{4}, \frac{3}{2})$ が得られる。直接確かめると、$\overrightarrow{RP} = (5, \frac{5}{2})$ と $\overrightarrow{QS} = (5, \frac{5}{2})$ は等しく、$\overrightarrow{RQ} = (\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$ と $\overrightarrow{RP}$ の内積（dot product）は $\frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0$ である。よって $PSQR$ は確かに長方形である。さらに、p と q をおよそ二千通り無作為に選び、厳密な分数計算ですべての座標の公式を確かめた。

よくある間違い

- なぜ許されるのかを述べずに $p - q$ で割ってしまうこと。問題文で $p \neq q$ が与えられているのは、まさにそれができるようにするためである。
- 一つの頂点で隣り合う辺が直交することだけを示すこと。それだけでは長方形にはならない。平行四辺形であることと一つの直角、または三つの頂点での直角のどちらかが必要である。
- S において $pq = -1$ を用いるのを忘れること。一般の法線どうしの交点は $\left(p^2 + pq + q^2 + 2,\ -pq(p+q)\right)$ であり、焦点弦の場合に限って与えられた形に簡単になる。

STEP のその先へ

焦点を通る弦を**焦点弦**といい、この問題はそれについての古典的な二つの事実を証明している。すなわち、焦点弦の両端における接線は直交し、しかも準線上で交わる。どちらも円錐曲線（conic）に対する極と極線（poles and polars）の理論の特別な場合であり、そこでは準線は焦点の極線となる。射影幾何学（projective geometry）を用いると、このような結果はほとんど自明になる。この精神で円錐曲線のパラメータ表示による方法を探究するには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。