解答例

STEP I 2005、第 12 問

確率・統計 ・ ベン図による評価

STEP I 2005、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/05-s1-q12

鍵となる考え方

「どのような値の範囲なら矛盾がないか」という形の問題は、各領域の値が未知であるが、そのすべてが**非負**（non-negative）でなければならないようなベン図（Venn diagram）についての問題である。すべての領域を、できるだけ少ない自由な未知数で表す。そうすれば、「この領域 ≥ 0」という各条件が一つの評価式となり、それらの評価式を合わせると範囲が得られる。小問 (ii) では、数え上げの議論（三つの単独の確率を足し合わせるとき、各魔法使いが何回数えられるか）により、個々の領域を求めなくても「ちょうど 2 つ」の確率が得られる。

解答

小問 (i)

ホビットがパイプを吸うという事象を S、帽子をかぶるという事象を H とする。$t = \mathrm{P}(S \cap H)$ とおく。ベン図の四つの領域は

$$\mathrm{P}(S \cap H) = t, \qquad \mathrm{P}(S \cap H') = 0.7 - t,$$
$$\mathrm{P}(S' \cap H) = 0.4 - t, \qquad \mathrm{P}(S' \cap H') = 1 - (0.7 + 0.4 - t) = t - 0.1.$$

である。四つすべてを非負にする t の選び方はどれも正しい確率分布（probability distribution）を与え、逆も成り立つ。実際に効いてくる条件は $t \geq 0.1$（最後の領域から）と $t \leq 0.4$（三つ目の領域から）であり、残りの条件はこれらから従う。よって $0.1 \leq t \leq 0.4$ であり、$p = 0.7 - t$ であるから

$$0.3 \leq p \leq 0.6.$$

両端の値はともに実現される。$p = 0.6$ となるのは、帽子をかぶるパイプ愛好者ができるだけ少ないとき（すべてのホビットが二つのうち少なくとも一方をする場合）であり、$p = 0.3$ となるのは、帽子をかぶる者が全員パイプを吸うときである。

小問 (ii)：ちょうど 2 つ

魔法使いが帽子、マント、指輪を身につけるという事象をそれぞれ H, C, R とする。魔法使いが三つの品物のうちちょうど 1 つ、ちょうど 2 つを身につける確率をそれぞれ a, b とする。一つも身につけない確率は 0.05、ちょうど 3 つ身につける確率は 0.1 とわかっているので

$$0.05 + a + b + 0.1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a + b = 0.85.$$

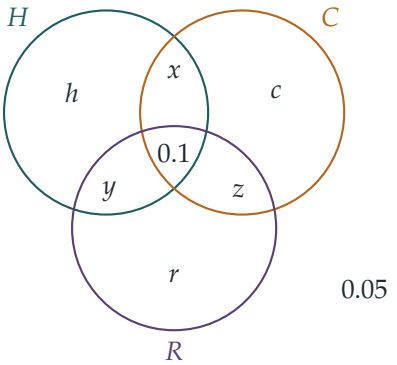
次に、与えられた三つの確率を足す：$\mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(R) = 0.7 + 0.8 + 0.4 = 1.9$。この和において、ちょうど k 個の品物を身につける魔法使いは k 回数えられるので

$$a + 2b + 3(0.1) = 1.9 \quad \Longrightarrow \quad a + 2b = 1.6.$$

辺々引くと $b = 0.75$（そして $a = 0.1$）を得る。魔法使いが品物のうちちょうど 2 つを身につける確率は $\frac{3}{4}$ である。

小問 (ii)：q の範囲

図のように内側の七つの領域に名前をつける。ちょうど 1 つの品物に対応する領域を h, c, r、ちょうど 2 つに対応する領域を x, y, z とし、中央は 0.1、外側は 0.05 である。



H, C, R の合計と、ここまでの小問 (ii) の結果から

$$h + x + y = 0.6, \qquad c + x + z = 0.7,$$
$$r + y + z = 0.3, \qquad x + y + z = 0.75.$$

最後の式を用いて、最初の三つの式それぞれから二つの変数の組を消去すると

$$h = z - 0.15, \qquad c = y - 0.05, \qquad r = x - 0.45.$$

（検算として、$h+c+r = 0.75-0.65 = 0.1 = a$ である。）したがって、分布全体は $x+y+z=0.75$ を満たす x, y, z によって決まり、それが正しい分布となるのは、六つの領域がすべて非負であるとき、かつそのときに限る：

$$x \geq 0.45, \qquad y \geq 0.05, \qquad z \geq 0.15.$$

考えてみよう x はどこまで大きくなれるか。

$x = 0.75 - y - z$ かつ $y+z \geq 0.05+0.15 = 0.2$ であるから $x \leq 0.55$ を得る。等号は $y = 0.05, z = 0.15$ のときに成り立つ。最小値 $x = 0.45$ は、たとえば $y = 0.1, z = 0.2$ のときに実現される。y と z は連続的に動かせるので、その間のすべての値も実現される。よって

$$0.45 \leq x \leq 0.55.$$

最後に、マントを身につけているときに帽子をかぶり指輪をしていないというのは、ちょうど領域 x にあたるので

$$q = \mathrm{P}(H \cap R' \mid C) = \frac{\mathrm{P}(H \cap C \cap R')}{\mathrm{P}(C)} = \frac{x}{0.8}, \qquad \text{より} \qquad \frac{9}{16} \leq q \leq \frac{11}{16}.$$

検算

- 端の場合 $x = 0.55, y = 0.05, z = 0.15$ では $h = 0, c = 0, r = 0.1$ となる。八つの領域の和は 1 であり、要求どおり $\mathrm{P}(H) = 0.7, \mathrm{P}(C) = 0.8, \mathrm{P}(R) = 0.4$ を与える。
- データと矛盾しない八つの領域の値の割り当てを、0.01 刻みですべて列挙した。どの割り当てでも $x+y+z = 0.75$ であり、q は 0.5625 から 0.6875 までの値をとる。同様に (i) では、p は 0.3 から 0.6 までの値をとる。

よくある間違い

- (i) で「どちらでもない」領域を忘れ、下限を $t \geq 0.1$ ではなく $t \geq 0$ としてしまう。すると上限が誤って $p \leq 0.7$ となる。
- (ii) で $\mathrm{P}(C) = 0.8$ ではなく 1 で割ってしまう。「マントを身につけているとき」という条件によって分母が変わるのである。
- H, C, R を独立（independent）とみなしてしまう。問題文にはそのようなことは一切書かれておらず、実際 $\mathrm{P}(H \cap C \cap R) = 0.1 \neq 0.7 \times 0.8 \times 0.4$ である。

STEP のその先へ

未知の確率について線形な量の範囲を、線形の等式と非負条件のもとで求めることは、小さな**線形計画問題**（linear programme）である。最大値・最小値は必ず実行可能領域（feasible region）の頂点でとられる。今回の極値が、いくつかの領域を 0 とおくことで得られたのはこのためである。同じ考え方から、小問 (i) で用いたフレシェ（Fréchet）の不等式（Fréchet bounds）$\max(0, \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1) \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B))$ が得られる。包除原理（inclusion–exclusion）と条件付き確率（conditional probability）についてさらに学ぶには、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。