解答例

STEP I 2005、第 11 問

力学 ・ ベクトルによる運動学

> **STEP I 2005、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q11

鍵となる考え方

この問題はすべて、2 つのベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ が互いにどのような位置関係にあるかを問うものである。垂直（perpendicular）であるとはスカラー積（scalar product）$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ が零であることであり、平行（parallel）であるとは「外積」型の組合せ $xv_y - yv_x$ が零であることである。$\sin 2t = 2\sin t \cos t$ および $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ と書き直せば、どちらの式もきれいに簡単になる。距離と概形については、すべてを $\cos t$ で表すか、あるいは t を完全に消去するのが得策である。

解答

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ とおく。ここで

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t, \qquad y = 2\cos t, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

微分すると、速度（velocity）は

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\,\mathbf{i} - (2\sin t)\,\mathbf{j}.$$

小問 (i)

粒子が原点にあるのは $x = 0$ かつ $y = 0$ のときである。条件 $y = 0$ は $\cos t = 0$ を意味するから、与えられた範囲では $t = \frac{\pi}{2}$ または $t = \frac{3\pi}{2}$ である。これらの時刻ではいずれも自動的に $x = 2\sin t \cos t = 0$ となる。よって粒子が原点にあるのはちょうどこの 2 つの時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ と $t = \frac{3\pi}{2}$ であり、それ以外の時刻にはない。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

速度が変位（displacement）に垂直であるのは $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$ のときである（ただし「垂直」が意味をもつように、両ベクトルとも零でないとする）。いま

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= 2\sin 2t\cos 2t - 4\sin t\cos t\\ &= 2\sin 2t\cos 2t - 2\sin 2t\\ &= 2\sin 2t\,(\cos 2t - 1)\\ &= -4\sin 2t\,\sin^2 t,\end{aligned}$$

ここで $\cos 2t - 1 = -2\sin^2 t$ を用いた。これが零になるのは $\sin 2t = 0$ または $\sin t = 0$ のとき、すなわち

$$t = 0,\ \tfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

のときである。

考えてみよう $t=\frac{\pi}{2}$ と $t=\frac{3\pi}{2}$ は本当にこのリストに入れてよいだろうか？

よくない。小問 (i) より、これらの時刻では $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ であり、零ベクトル（zero vector）は向きをもたないので、意味のある形で何かに垂直であることはできない。スカラー積が零になるのは自明な理由によるものである。$t=0$ では $\mathbf{r}=2\mathbf{j}$、$\mathbf{v}=2\mathbf{i}$ であり、$t=\pi$ では $\mathbf{r}=-2\mathbf{j}$、$\mathbf{v}=2\mathbf{i}$ である。これらは正真正銘、互いに垂直な零でないベクトルである。よって速度が変位に垂直になるのは

$$t=0 \quad と \quad t=\pi.$$

のときである。

小問 (iii)

まず、$\mathbf{v}$ は決して零にならない。$\mathbf{v}=\mathbf{0}$ となるには $\sin t=0$ が必要だが、そのとき $\cos 2t = 1-2\sin^2 t = 1 \neq 0$ となるからである。

零でない 2 つのベクトル (x,y) と (v_x,v_y) が平行であるのは、ちょうど $xv_y - yv_x = 0$ のときである。ここでは

$$\begin{aligned}xv_y - yv_x &= \sin 2t\,(-2\sin t) - 2\cos t\,(2\cos 2t)\\ &= -4\sin^2 t\cos t - 4\cos t\,(1-2\sin^2 t)\\ &= -4\cos t\,(1-\sin^2 t)\\ &= -4\cos^3 t.\end{aligned}$$

これが零になるのは $\cos t = 0$ のときに限られ、小問 (i) より、それは粒子が原点にあるときに限られる。したがって粒子が原点から離れているときはつねに $\cos t \neq 0$ であり、この組合せは零でなく、速度は変位に平行でない。以上で証明が完了する。

小問 (iv)

$c = \cos^2 t$ とおくと、$0 \leq c \leq 1$ である。このとき

$$|\mathbf{r}|^2 = \sin^2 2t + 4\cos^2 t = 4\sin^2 t \cos^2 t + 4\cos^2 t = 4c(1-c) + 4c = 4c(2-c).$$

2 次式 $4c(2-c)$ は $c = 1$ に頂点をもち、$[0,1]$ で増加するので、この区間での最大値は $c = 1$ でとり、$|\mathbf{r}|^2 = 4$ となる。したがって原点からの距離の最大値は

$$|\mathbf{r}|_{\max} = 2,$$

であり、これは $\cos^2 t = 1$ のとき、すなわち $t = 0$ と $t = \pi$ において、点 $(0, \pm 2)$ でとられる。これらがちょうど小問 (ii) で求めた時刻であることは心強い。距離が最大となる点では、速度の動径成分（radial component）が零にならなければならないからである。

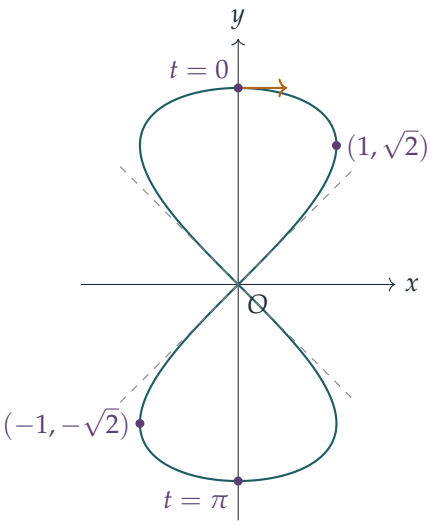
概形を描くために t を消去する。$x = y\sin t$ かつ $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{4}y^2$ であるから

$$x^2 = y^2\left(1 - \frac{y^2}{4}\right), \qquad \text{すなわち} \qquad 4x^2 = y^2(4 - y^2).$$

概形に書き込むべき特徴をいくつか挙げる。

- 曲線は両軸に関して対称であり、$-2 \leq y \leq 2$ である。
- $|x| = |\sin 2t| \leq 1$ であり、$y = \pm\sqrt{2}$ のとき $|x| = 1$ となる。
- 原点の近くでは $4x^2 \approx 4y^2$ であるから、曲線はそこで直線 $y = \pm x$ に沿って自分自身と交わる。これは $t = \frac{\pi}{2}$ での速度 $-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ および $t = \frac{3\pi}{2}$ での速度 $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ と一致する。
- 小問 (ii) で示したとおり、$(0, \pm 2)$ では軌道は水平である。

t を追っていくと、粒子は $(0,2)$ から $+\mathbf{i}$ の向きに動き始め、上側のループの右側を下って原点に至り、下側のループを（左側から先に）回って再び原点に戻り、最後に上側のループの左側を上っていく。軌道は 8 の字曲線（figure of eight）である。



検算

- $t = \frac{\pi}{4}$ のとき：$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$ であり、これは $4x^2 = 4 = y^2(4 - y^2) = 2 \cdot 2$ を満たす。また $|\mathbf{r}| = \sqrt{3} < 2$ であり、$4c(2 - c) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$ と一致する。
- $[0, 2\pi)$ 上で t を細かくとって調べると、距離の最大値は 2.000 であり、距離がほぼ零になるのは $t \approx 1.57$ と 4.71 のときだけである。また、無作為に選んだ時刻で恒等式 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -4 \sin 2t \sin^2 t$ と $xv_y - yv_x = -4\cos^3 t$ が成り立つことも確認できる。速さの最小値はおよそ 1.32 であるから、$\mathbf{v}$ は決して零にならない。

よくある間違い

- 小問 (ii) で $t = \frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2}$ を挙げてしまうこと。そこでスカラー積が零になるのは $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ だからにすぎない。
- 小問 (iii) で、$\mathbf{v}$ が決して零にならないことの確認を忘れること。速度が零であれば、あらゆるものに「平行」になってしまう。
- ループを左右に並べて描くこと。y は $[-2, 2]$ の範囲を動くが x は $[-1, 1]$ の範囲しか動かないので、8 の字は縦に立ち、ループは原点の上と下にある。

STEP のその先へ

量 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2$ と xv_y-yv_x は、それぞれ運動の動径部分と、原点のまわりの（単位質量あたりの）角運動量（angular momentum）である。極座標（polar coordinates）では後者は $r^2\dot{\theta}$ となる。小問 (iii) は、角運動量が零になるのは原点においてだけであり、したがって粒子が O に向かって、あるいは O から真っすぐ遠ざかるように動くことは決してない、ということを述べている。曲線そのものは Gerono のレムニスケート（lemniscate of Gerono）であり、古典的な 8 の字曲線の数多くの例の 1 つである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの精神で極座標と角運動量を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。