解答例

STEP I 2005、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

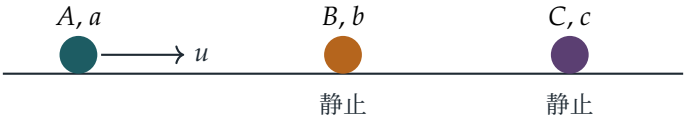
> **STEP I 2005、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q10

鍵となる考え方

各衝突（collision）は二つの滑らかな（smooth）質点（particle）の直接衝突であるから、そこから二つの方程式が得られる。すなわち、直線方向の運動量保存則（conservation of momentum）と、ニュートン（Newton）の実験則（Newton's experimental law）（遠ざかる速さ $= e\times$ 近づく速さ）である。一般の二質点についてこれらを一度解いておけば、得られた公式を二回目の衝突にもそのまま使える。特別な場合については、本当の問題は二回の衝突で話が終わるかどうかである。求めるのは最終的な速度であるから、どの質点も前方の質点に追いつかないことを確かめなければならない。

解答

A, B, C を滑らかな面上の一直線に沿って運動する質点とみなす。したがって水平方向の外力ははたらかず、各衝突において直線方向の運動量は保存される。u の向きを正とする。B との衝突後の A の速度を p、C との衝突後の B の速度を q とおく。



一回目の衝突：v を求める

衝突前、A の速度は u で B は静止している。衝突後の速度はそれぞれ p と v である。運動量保存則とニュートンの実験則より

$$au = ap + bv, \qquad v - p = eu.$$

$p = v - eu$ を第一式に代入すると $au = av - aeu + bv$ となるから

$$v = \frac{a(1+e)u}{a+b}, \qquad p = v - eu = \frac{(a-eb)u}{a+b}.$$

$v > 0$ であるから、B は確かに C に向かって動く。

二回目の衝突：w を求める

これは、B（質量 b、速さ v）が C（質量 c、静止）に衝突するという同じ状況である。したがって、上の公式で $a \to b, b \to c, u \to v$ と置き換えればよい：

$$w = \frac{b(1+e)v}{b+c}, \qquad q = \frac{(b-ec)v}{b+c}.$$

v を代入すると

$$w = \frac{b(1+e)}{b+c} \cdot \frac{a(1+e)u}{a+b} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)},$$

となり、示すべき式が得られた。

この二回の衝突の後、速度は p, q, w である。さらに衝突が起こるのは $p > q$（A が B に追いつく）または $q > w$（B が C に追いつく）の場合に限られる。ニュートンの実験則より $q - w = -ev < 0$ であるから後者は決して起こらず、p と q を比較するだけでよい。

> **考えてみよう** なぜ二回の衝突で止めて p, q, w を答えとしてはいけないのだろうか。

問題が求めているのは**最終的な**速度だからである。もしその後も A が B より速く動いていれば、A は再び B に衝突し、すべてが変わってしまう。したがって、それぞれの場合に $p \le q$ を確かめなければならない。

小問 (i)

ここでは $a = eb$ かつ $b = ec$ である（質量は正であるから $e > 0$）。このとき $a - eb = 0$ かつ $b - ec = 0$ であるから

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

w については $a + b = b(1+e)$ と $b + c = b + b/e = b(1+e)/e$ を用いて

$$w = \frac{eb \cdot b\,u(1+e)^2}{b(1+e) \cdot b(1+e)/e} = e^2 u.$$

A と B はともに静止し、C は遠ざかるので、これ以上の衝突は起こらない。最終的な速度は

$$A:\ 0, \qquad B:\ 0, \qquad C:\ e^2 u.$$

各衝突で運動量のすべてが次の質点に受け渡される。後ろの質点ほど軽いニュートンのゆりかご（Newton's cradle）のようなものである。

小問 (ii)

今度は $b = ea$ かつ $c = eb = e^2a$ である。このとき

$$v = \frac{a(1+e)u}{a(1+e)} = u, \qquad p = \frac{(a-e^2a)u}{a(1+e)} = (1-e)u,$$

ここで $1-e^2 = (1-e)(1+e)$ を用いた。二回目の衝突では質量 b, c の比が a, b の比と等しく、しかも B は速さ u で到達するので、これは一回目の衝突の完全な複製である：

$$w = u, \qquad q = (1-e)u.$$

（直接計算すると $w = \dfrac{a \cdot ea \cdot u(1+e)^2}{a(1+e) \cdot ea(1+e)} = u$ である。）

ここで $p = q$ であるから A が B に追いつくことはない。また $e > 0$ のとき $q = (1-e)u < u = w$ であるから、B が C に追いつくこともない。最終的な速度は

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ (1-e)u, \qquad C:\ u,$$

であり、いずれも A のはじめの運動の向きである。

検算

- (ii) の運動量：$a(1-e)u + ea(1-e)u + e^2a\,u = au$。(i) では：$c \cdot e^2u = e^2c\,u = au$。
- (ii) で $e = 1$（完全弾性（perfectly elastic））とすると、A と B は最終的に静止し、C は u で動き去る。運動エネルギー（kinetic energy）が保存されるには $\frac{1}{2}au^2 = \frac{1}{2}cu^2$、すなわち $c = a$ が必要であり、これはまさに $e = 1$ のときの $c = e^2a$ である。
- 数値例：$e = \frac{1}{2}$、質量 $1, 2, 4$、$u = 1$（小問 (i)）のとき、最終的な速度は $0, 0, \frac{1}{4}$ である。質量 $4, 2, 1$（小問 (ii)）では $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ となる。これらの値、および v と w の一般の公式は、数千組のランダムな質量と e の値について、その後の衝突もシミュレーションしたうえで厳密な算術により確認した。

よくある間違い

- ニュートンの実験則で速度を逆向きに書いてしまうこと。正しくは、衝突後の（前方の質点の速度 − 後方の質点の速度）$= e \times$ 衝突前の（後方 − 前方）である。
- A が再び B に追いつくかどうかを確かめずに、二回の衝突後の速度を答えてしまうこと。

STEP のその先へ

衝突の連鎖は、運動量やエネルギーが物質中をどのように伝わるかを表す最も単純なモデルであり、小問 (i) の質量比は**すべての**運動量が最後の質点に集まるように選ばれている。質量の並びを逆にして、重いものを軽いものの後ろに置き、e を 1 に近くすると、最後の質点は最初の質点よりも速く動く。これは、大きなボールの上に小さなボールを載せて一緒に落とすと、小さなボールが高く跳ね上がるおもちゃの原理である。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は重心系（centre-of-mass frame）を用いて衝突を扱っており、そうすると v や w のような公式はほとんど自明になる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。