解答例

STEP I 2005、第 1 問

純粋数学 • 各位の数の和の数え上げ

> **STEP I 2005、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q1

鍵となる考え方

5 桁の数の各位の数字の和（digit sum）は最大で $9 \times 5 = 45$ であり、問われている 2 つの和はいずれもこれに近い。そこで、数字そのものを数えるのではなく、各数字が 9 に**どれだけ足りないか**を数える。この不足分（shortfall）は小さな非負の数であり、その合計も小さな一定の値になる。これを数えるのは易しく、場合分けで列挙してもよいし、「星と棒」（stars and bars）の方法を使ってもよい。

解答

数を $d_1d_2d_3d_4d_5$ と書く。ただし $d_1 \in \{1,\dots,9\}$（最高位は 0 でない）、$d_2,\dots,d_5 \in \{0,\dots,9\}$ である。

$$e_i = 9 - d_i \qquad (i = 1,\dots,5),$$

とおき、これを第 i 桁の**不足分**とよぶ。各 e_i は $0 \le e_i \le 9$ を満たす整数であり（$d_1 \ge 1$ より $e_1 \le 8$ でもある）、

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 45 - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5).$$

が成り立つ。異なる数からは異なる組 $(e_1,\dots,e_5)$ が得られ、逆も成り立つので、各位の数字の和が S である数を数えることは、合計が $45 - S$ となる不足分の順序付きの組を数えることと同じである。

小問 (i)

各位の数字の和が 43 であることは、不足分の合計が $45 - 43 = 2$ であることを意味する。2 を非負の部分に分ける方法は 2 通りしかない。

- **1 つの数字が 2 だけ不足し、残りの不足は 0**。1 つの数字が 7 で、残りの 4 つが 9 である。7 は 5 つの位置のどこにあってもよいので、5 個の数 $(79999, 97999, \ldots, 99997)$ がある。
- **2 つの数字がそれぞれ 1 ずつ不足し、残りの不足は 0**。2 つの数字が 8 で、残りの 3 つが 9 である。5 つの位置のうちどの 2 つに 8 を置くかを選ぶので、$\binom{5}{2} = 10$ 個の数（$88999, 89899, \ldots, 99988$）がある。

どの数字も 7 以上なので、最高位が 0 になることはなく、これらはすべて確かに 5 桁の数である。2 つの場合は重複せず、すべての可能性を尽くしているので、各位の数字の和が 43 である 5 桁の数は

$$5 + 10 = 15$$

個であり、題意が示された。

小問 (ii)

今度は不足分の合計が $45 - 39 = 6$ でなければならない。$6 \leq 8$ なので、どの不足分も上限を超えることはない。実際、$e_1 \leq 6 \leq 8$ より $d_1 \geq 3$ が保たれ、$e_i \leq 6 \leq 9$ より他の数字も 3 以上 9 以下に保たれる。したがって、

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 6, \qquad e_i \geq 0 \text{ は整数.}$$

の順序付きの解の個数を求めればよい。

> ? **考えてみよう** すべてを列挙せずに、これらを数えるにはどうすればよいか？

6 個の星を一列に並べ、4 本の棒で 5 つのグループに仕切ることを考える。

$$\star\star\,|\,|\,\star\,|\,\star\star\star\,| \quad \text{は次を表す} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (2, 0, 1, 3, 0).$$

6 個の星と 4 本の棒の並べ方はそれぞれちょうど 1 つの解を与え、どの解もちょうど 1 つの並べ方から得られる。並べ方は 10 か所のうちどの 4 か所に棒を置くかを選べば決まるので、解の個数は

$$\binom{10}{4} = 210.$$

である。よって、各位の数字の和が 39 である 5 桁の数は **210** 個ある。

小問 (i) のように場合分けで数えたいなら、6 を高々 5 個の正の部分に分ける方法を列挙し、それぞれの並べ方を数えればよい。

不足分	個数	不足分	個数
6	5	$3,2,1$	$5\cdot 4\cdot 3 = 60$
$5,1$	$5\cdot 4 = 20$	$3,1,1,1$	$5\cdot 4 = 20$
$4,2$	$5\cdot 4 = 20$	$2,2,2$	$\binom{5}{2} = 10$
$4,1,1$	$5\cdot \binom{4}{2} = 30$	$2,2,1,1$	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
$3,3$	$\binom{5}{2} = 10$	$2,1,1,1,1$	5

合計は $5+20+20+30+10+60+20+10+30+5 = 210$ であり、星と棒の結果と一致する。（6 の分割（partition）$1,1,1,1,1,1$ には 6 つの数字が必要なので、これは現れない。）

検算

- 星と棒の方法で小問 (i) も再現できる。不足分の合計が 2 ならば $\binom{6}{4} = 15$ となる。
- 極端な場合も正しく働く。不足分の合計が 0 ならば $\binom{4}{4} = 1$ 個（99999）、不足分の合計が 1 ならば $\binom{5}{4} = 5$ 個である。
- 90 000 個の 5 桁の数すべてをコンピュータで調べると、各位の数字の和が 43 のものはちょうど 15 個、39 のものはちょうど 210 個であり、場合ごとの内訳も上の表のとおりである。

よくある間違い

- $\{8,8,9,9,9\}$ を 1 個の数、あるいは 5 個の数として数えてしまう。数字の並び順は区別されるので、並べ方は $\binom{5}{2} = 10$ 通りである。
- 最高位の確認を忘れる。ここではどの数字も 3 以上なので最高位が 0 になることはないが、各位の数字の和がもっと小さい場合（たとえば 20）には星と棒の方法では数えすぎになり、$d_1 = 0$ となる場合や 9 を超える数字を含む場合を除かなければならない。

STEP のその先へ

n を k 個の非負整数の順序付きの和として表す方法の数は $\binom{n+k-1}{k-1}$ であり、これは $(1+x+x^2+\cdots)^k$ における x^n の係数に等しい。各数字を 9 以下に制限すると、これは $(1+x+\cdots+x^9)^k$ に置き換わり、上限による打ち切りは包除原理（inclusion–exclusion principle）によって処理される。こうした母関数（generating function）の方法は大学 1

年の組合せ論（combinatorics）の定番である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）や Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論）は、数字や数え上げの問題をさらに探究するのによい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。