解答例

STEP III 2004、第 9 問

力学 ・ 力のモーメントと摩擦

STEP III 2004、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/04-s3-q9

鍵となる考え方

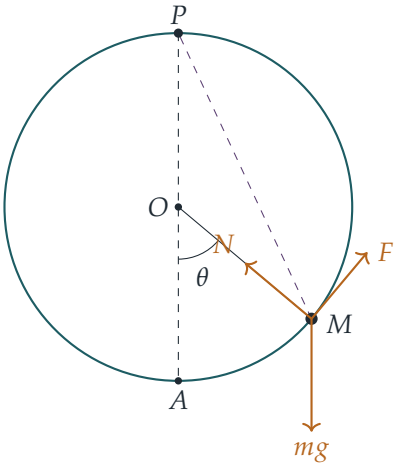
輪の重力は軸の真下にある O を通って作用するので、P のまわりのモーメント（moment）をもたない。輪にはたらく他の力は（軸からの反力を除けば）ネズミからの接触力だけであるから、輪が静止したままでいるのは、その接触力の P のまわりのモーメントが 0 であるとき、すなわちその作用線（line of action）が P を通るときにちょうど限られる。すべては、ネズミの接触力が MP の向きを向くことができるのはいつか、と問うことから導かれる。一度は速さについて、もう一度は摩擦の限界について問うのである。

解答

モデル

ネズミを質量 m の質点、輪を P を通るなめらかな水平軸のまわりに自由に回転する剛体の輪（rigid ring）とみなす（輪の質量は結果に影響しないことがわかる）。$\theta = \angle AOM$ とおき、鉛直下向きから測るものとし、ネズミは θ が増加する向きに走るとする。輪が静止している間、ネズミは O を中心とする半径 a の固定された円周上を一定の速さ u で運動する。

ネズミにはたらく力は、重力 mg、輪から O に向かう垂直抗力（normal reaction）N、そして接線方向の摩擦力（friction）F である。F は θ が増加する向き（輪を上る向き）を正にとる。



ネズミについて、接線方向（速さが一定なので接線方向の加速度はない）と半径方向（O に向かう加速度 u^2/a）に力を分解すると、

$$F = mg\sin\theta,$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{mu^2}{a}.$$

輪が釣り合うのはいつか

ニュートン（Newton）の第 3 法則（third law）により、ネズミは輪を、ネズミにはたらく接触力（N と F）と大きさが等しく向きが反対の力で押す。輪の重力は P の鉛直下方にある O に作用し、軸からの反力は P に作用するので、どちらも P のまわりのモーメントをもたない。したがって、輪が POA を鉛直に保ったまま釣り合うための必要十分条件は、接触力の P のまわりのモーメントが 0 であること、すなわちその作用線が P を通ることである。

三角形 OPM は二等辺三角形（isosceles triangle）（$OP = OM = a$）で $\angle POM = \pi - \theta$ であるから、$\angle OMP = \frac{1}{2}\theta$ である。よって直線 MP は半径 MO と角 $\frac{1}{2}\theta$ をなし、θ が増加する向きに傾いている。したがって、ネズミにはたらく接触力が MP の向きを向くのは、ちょうど

$$\frac{F}{N} = \tan\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (*)$$

のときである。（同じことだが、P のまわりのモーメントを直接計算すると、ネズミが輪に及ぼす力のモーメントは $a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)]$ であり、$\sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta$ である。）

考えてみよう これを u についての条件にするにはどうすればよいか。

運動方程式（equations of motion）を用いる。ネズミにはたらく接触力は、質量と加速度の積から重力を引いたものである：

$$\mathbf{R} = m \cdot \frac{u^2}{a}\,\widehat{MO} + mg\,\widehat{\text{上}}.$$

一方 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = a\,\widehat{MO} + a\,\widehat{\text{上}}$ であり、係数は等しい。よって、すべての θ に対して $\mathbf{R}$ が MP に平行となるための必要十分条件は $u^2/a = g$、すなわち

$$u = \sqrt{ag}.$$

である。代数的に確かめると、$u^2 = ag$ のとき運動方程式から $F = mg\sin\theta$、$N = mg(1+\cos\theta)$ が得られるので、

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

となり、これは $(*)$ である。一般の速さでは P のまわりのモーメントは $m\sin\theta\,(u^2 - ag)$ となり、これがあらゆる位置で 0 になるのは $u^2 = ag$ のときに限る。よって、輪が実際にこの摩擦力を供給できるならば、ネズミは速さ $\sqrt{ag}$ で走ることで、求められているとおり輪を釣り合いの状態に保つことができる。次にその点を調べる。

摩擦の限界

ネズミの足が滑らずに輪をとらえていられるのは $|F| \le \mu N$ である間だけである。$u = \sqrt{ag}$ のもとで、$\cos\frac{1}{2}\theta > 0$ となる下側の部分 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ では、この条件は

$$\tan\tfrac{1}{2}|\theta| \le \mu \quad\Longleftrightarrow\quad |\theta| \le 2\arctan\mu.$$

となる。よって $\angle AOM = 2\arctan\mu$ に達するまではすべてうまくいく。（この点が輪の下半分にあるのは $\mu < 1$ のときに限る。$\mu \ge 1$ ならばネズミはそこに達することはない。）

この点を越えると、どのように速さを選んでも役に立たない。釣り合いには $F/N = \tan\frac{1}{2}\theta > \mu$ が必要であるが、摩擦はそれを与えられない。任意の速さと $|F| \le \mu N$ を満たす任意の摩擦力に対して、ネズミが輪に及ぼす力の P のまわりのモーメントは

$$a[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)] \;\ge\; aN(1+\cos\theta)(\tan\tfrac{1}{2}\theta - \mu) > 0.$$

となる。

何が起こるか

ネズミが $\angle AOM = 2\arctan\mu$ を越えると、もはや十分に強く輪をとらえていられない。足が滑り、摩擦力は限界値 μN になり、ネズミは速さを保てずに後ろへ滑り始め

る。このときネズミが輪に及ぼす接触力は P の脇を通るので、0 でないモーメントをもち、輪はもはや釣り合わない。輪は P のまわりに回転し始める。上のモーメントの向きは、ネズミが押す垂直方向の力が弱まった摩擦力に勝る向きであるので、輪は A がネズミの側、すなわちネズミが走っていた向きへ動くように振れる。それ以降の運動はもはや単純な釣り合いの描像ではなく、ネズミが輪の上を滑る一方で輪が P のまわりに振れる運動となる。

検算

- $\theta = 0$ のときネズミは A にあり、接触力 $N = 2mg$ は鉛直で P を通り、摩擦は必要ない。予想どおりである。
- 速さ $\sqrt{ag}$ は速さの次元をもち、μ にも輪の質量にもよらず、垂直抗力を $mg(1+\cos\theta)$ とする。これは下半分のどこでも正である。
- $\mu = 0.5$ のとき臨界角は $2\arctan 0.5 \approx 0.927\,\text{rad} \approx 53.1^\circ$ である。そこでは $\sin\theta = 0.8$、$1+\cos\theta = 1.6$ であるから、$F/N = 0.5 = \mu$ がちょうど成り立つ。$u^2 = ag$ として無作為な位置で P のまわりのモーメントを数値的に確かめたところ、$10^{-15}mga$ の範囲内で 0 となった。

よくある間違い

- P ではなく O のまわりのモーメントをとること。輪は P を支点として回転するのであり、垂直抗力（O を通る）は P のまわりにモーメントをもつ。
- N の向心（centripetal）項を忘れること。そうすると $N = mg\cos\theta$ となり、誤った摩擦の条件が得られる。
- ネズミが単に「落ちる」と主張すること。下半分では常に $N > 0$ である。破綻するのは接触ではなく、足のグリップである。

STEP のその先へ

ここでの見事な事実は、物体が支点のまわりで釣り合うのは、他の力の合力が支点を通るときにちょうど限られるということである。「作用線が P を通る」という議論が、1 ページ分の力の分解に取って代わる。後半は連成系（coupled systems）への最初の入門であり、そこでは滑る接触を通じて一方の物体の運動が他方の物体の運動に影響を及ぼす。滑り始めた後の運動を解析するには、輪の慣性モーメント（moment of inertia）と剛体の回転（rigid-body rotation）の完全な方程式が必要になる。Kleppner

と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりのトルク（torque）と摩擦に制限された運動の両方を、このような流儀で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。