解答例

STEP III 2004、第 8 問

純粋数学 ・ 微分方程式

> **STEP III 2004、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q8

鍵となる考え方

$1/y$ の項があるため、この方程式は y について線形（linear）ではない。しかし両辺に y を掛けると、$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は y^2 の導関数（derivative）の半分になり、$1/y$ の項は単なる x の関数になる。したがって $u = y^2$ を用いて表すと方程式は線形になり（ベルヌーイ型（Bernoulli type）の方程式）、あとは積分因子（integrating factor）で解き切ることができる。得られる 3 つの曲線は 2 次曲線（conic）であり、それらが何であるかを見抜けば概形を描くのは容易である。

解答

置換

$u = y^2$ とおく。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\left(f(x)\,y + \frac{g(x)}{y}\right) = 2f(x)\,y^2 + 2g(x).$$

y^2 を u で置き換えると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2f(x)\,u = 2g(x),$$

となり、これは u について線形である。すなわち u と $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ はいずれも 1 次でしか現れず、その係数は x のみに依存する。これが示すべきことであった。

方程式を解く

ここでは $f(x) = \frac{1}{x}$、$g(x) = -1$ であるから、線形方程式は

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}u = -2.$$

となる。積分因子は $\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = \dfrac{1}{x^2}$ である。両辺にこれを掛けると、

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

積分すると、定数 C を用いて $\dfrac{u}{x^2} = \dfrac{2}{x} + C$ となるので、一般解（general solution）は

$$y^2 = 2x + Cx^2.$$

である。（もとの方程式は $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ を必要とするので、各解は 0 を含まず $2x + Cx^2 > 0$ を満たす x の区間上で定義され、その区間全体で y の符号は一定である。）

3 つの曲線

3 点はいずれも $x > 0$ かつ $y > 0$ を満たすので、各解曲線は、$y^2 = 2x + Cx^2$ のうち $y > 0$ の部分で、その点を含む正の x の区間上にあるものである。

$(1,1)$ **を通るもの：** $1 = 2 + C$ より $C = -1$ であり、$y^2 = 2x - x^2$ となる。平方完成すると、

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

となり、中心 $(1,0)$、半径 1 の円である。解曲線は上半円 $y = \sqrt{2x - x^2}$（$0 < x < 2$）である。

$(2,2)$ **を通るもの：** $4 = 4 + 4C$ より $C = 0$ であり、$y^2 = 2x$ となる。これは頂点が原点、軸が x 軸の放物線である。解曲線は $y = \sqrt{2x}$（$x > 0$）である。

$(4,4)$ **を通るもの：** $16 = 8 + 16C$ より $C = \frac{1}{2}$ であり、$y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$ となる。平方完成すると $\frac{1}{2}(x+2)^2 - y^2 = 2$、すなわち

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

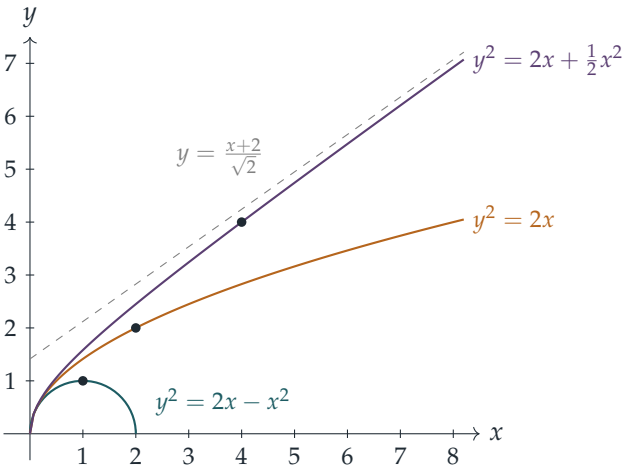
となり、中心 $(-2,0)$、頂点 $(0,0)$ と $(-4,0)$、漸近線（asymptote）$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$ の双曲線（hyperbola）である。解曲線は右側の枝の上半分 $y = \sqrt{2x + \frac{1}{2}x^2}$（$x > 0$）である。

考えてみよう なぜ双曲線の左側の枝や、下半分を含めないのだろうか？

微分方程式の解は、ある区間上で微分可能であり、その区間上で方程式を満たさなければならない。そして方程式は $x=0$ または $y=0$ のとき定義されない。$(4,4)$ から左へ進むと曲線は $(0,0)$ に達し、そこでは両方の条件が破れるので、その先へ延長することはできない。左側の枝（$x \le -4$ の部分）や下半分も $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$ を満たすが、それらは別の解であって、$(4,4)$ を通る解ではない。

概形

3 つの曲線はいずれも原点から鉛直な接線をもって出発し（$x=0$ の近くではどれも $y \approx \sqrt{2x}$ のようにふるまう）、与えられた点での傾きはそれぞれ $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$、$\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$、$\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。x が大きくなると、円は $(2,0)$ へ下りてきて、放物線は $\sqrt{x}$ のように増加し、双曲線は漸近線 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$ に近づく。$x>0$ に対して $2x - x^2 < 2x < 2x + \frac{1}{2}x^2$ であるから、円は放物線の下にあり、放物線は双曲線の下にある。



検算

- 代入して確かめる：$y^2 = 2x + Cx^2$ ならば $2yy' = 2 + 2Cx$ より $y' = \frac{1+Cx}{y}$ であり、一方 $\frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - x}{xy} = \frac{x + Cx^2}{xy} = \frac{1+Cx}{y}$ である。両者は一致する。
- もとの方程式を $(4,4)$ から $x=8$ まで数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）解き進めると $y \approx 6.92820$ となり、$\sqrt{16+32} = \sqrt{48}$ と一致する。$(1,1)$ および $(2,2)$ から同様に計算すると、半円および放物線と約 10^{-12} の精度で一致する。

よくある間違い

- 積分因子を x^{-2} ではなく x^2 としてしまう。u の係数は $-\frac{2}{x}$ なので、指数は $-2\ln x$ である。
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の係数 2 を落とし、$y^2 = x + Cx^2$ を導いてしまう。これは代入による検算で破綻する。
- 円全体、放物線の上下両方、あるいは双曲線の両方の枝を「解曲線」として描いてしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた技法は、任意の**ベルヌーイの微分方程式**（Bernoulli equation）$y' = f(x)y + g(x)y^n$ に対して有効である。置換 $u = y^{1-n}$ によって常に線形になる（ここでは $n = -1$ なので $u = y^2$）。$x = 0$ や $y = 0$ で必要となった注意は、解の存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorem）の最初の姿である。すなわち、右辺が行儀よくふるまう各点を通る解はちょうど 1 つ存在し、曲線族が交わりうるのはそうでない点に限られる。実際、ここで得た曲線はすべて原点で交わっている。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、ベルヌーイの微分方程式とこの定理が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。