解答例

STEP III 2004、第 7 問

純粋数学 • 漸化式による積分

> **STEP III 2004、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q7

鍵となる考え方

I_{n+1} の被積分関数（integrand）は、I_n の被積分関数に $\frac{t}{t+1}$ を掛けたものである。したがって、この一つの因子を評価すれば、隣り合う積分どうしを結ぶ不等式が得られる。部分積分（integration by parts）を用いると両者を結ぶ厳密な関係式も得られ、この不等式と等式を並べることで I_n 単独の評価を絞り出すことができる。厳密な関係式は次々と打ち消し合って（telescoping）I_1 まで下りていき、I_1 はよく知っている対数である。こうしてすべてが、誤差項（error term）を制御できる $\ln 2$ の級数（series）に変わるのである。

解答

不等式 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$

$0 \le t \le 1$ において

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

であり、これは t について増加するので、最大値は $\frac{1}{2}$ であり、それをとるのは $t = 1$ のときに限る。ここで I_{n+1} の被積分関数を

$$\frac{t^n}{(t+1)^{n+1}} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n}.$$

と書く。よって

$$\frac{1}{2} I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t+1} \right) \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n} \, \mathrm{d}t.$$

である。この被積分関数は連続で、負になることはなく、$0 < t < 1$ では真に正である（そこでは二つの因子がともに正である）。したがってこの積分は真に正であり、

$I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$ が成り立つ。

考えてみよう $\frac{t}{t+1}$ は実際に $\frac{1}{2}$ に達するのに、なぜ不等式は等号なしで成り立つのだろうか？

$\frac{1}{2}$ に達するのはただ一点 $t = 1$ においてだけである。連続で負でない関数が区間全体で正であれば、その積分は正である。したがって、一点で等号が成り立っても何の影響もない。

漸化式

$u = t^n$、$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (t+1)^{-(n+1)}$ として I_{n+1} を部分積分する。このとき $v = -\dfrac{1}{n(t+1)^n}$ である（$n \geq 1$ なのでこれは正しい）。

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{t^n}{n(t+1)^n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{n(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n\,2^n} + I_n, \end{aligned}$$

括弧内の値は $t = 1$ で $-\frac{1}{n2^n}$、$t = 0$ で 0 だからである。これが求める漸化式（recurrence）である。

I_n の評価

漸化式を不等式に代入すると

$$I_n - \frac{1}{n\,2^n} = I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} I_n < \frac{1}{n\,2^n} \quad \Longrightarrow \quad I_n < \frac{1}{n\,2^{n-1}}.$$

を得る。

$\ln 2$ の級数

まず

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2.$$

である。漸化式より、各 $r \geq 1$ に対して $I_r - I_{r+1} = \dfrac{1}{r\,2^r}$ が成り立つ。これらを $r = 1, \ldots, n$ について足し合わせると、左辺は次々と打ち消し合って

$$I_1 - I_{n+1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r}, \qquad \text{よって} \qquad \ln 2 = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + I_{n+1}.$$

となる。

評価 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$

剰余項（remainder）について二つの事実がある。一つは $I_{n+1} > 0$ であること（被積分関数が $(0,1]$ で正だから）、もう一つは、上の評価で n を $n+1$ に置き換えて得られる $I_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)2^n}$ である。したがって、すべての n に対して

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} < \ln 2 < \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r\,2^r} + \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

が成り立つ。部分和（partial sum）は

$$\tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{8}, \qquad \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{24} = \tfrac{16}{24} = \tfrac{2}{3}.$$

である。

考えてみよう それぞれの評価に、どの n を用いればよいだろうか？

それぞれ異なる値を用いる。下からの評価には $n = 3$ をとれば $\ln 2 > \frac{2}{3}$ である。上からの評価には $n = 2$ をとる。このとき誤差の上界は $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$ であり、

$$\ln 2 < \tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{15}{24} + \tfrac{2}{24} = \tfrac{17}{24}.$$

となる。以上を合わせて、求める $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$ が得られる。

検算

数値的には $\ln 2 \approx 0.6931$ であり、確かに $\frac{2}{3} \approx 0.6667$ と $\frac{17}{24} \approx 0.7083$ の間にある。シンプソン（Simpson）の公式（Simpson's rule）によれば $I_3 \approx 0.0681$ であり、上界 $\frac{1}{12} \approx 0.0833$ を十分に下回っている。実際 $\frac{5}{8} + 0.0681 = 0.6931$ である。また、n が 24 までの場合について、漸化式と二つの不等式を数値的に確かめた。

よくある間違い

- 二つの評価に同じ n を用いてしまう。$n = 3$ とすると上からの評価は $\frac{2}{3} + \frac{1}{32} = \frac{67}{96}$ となり、これは正しく、より精密でもあるが、問われている $\frac{17}{24}$ ではない。
- 部分積分で境界項の符号を誤る。v は負である。
- $I_{n+1} > 0$ である理由を述べ忘れる。等号なしの下からの評価にはこれが必要である。

STEP のその先へ

これは級数 $\ln 2 = \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r2^r}$ であり、$-\ln(1-x) = \sum x^r/r$ に $x = \frac{1}{2}$ を代入したものに、n 項までで打ち切ったときの剰余項の明示的な評価を添えたものである。剰余項を積分で評価するというのは、まさに積分形の剰余項をもつテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）の仕組みそのものであり、大学 1 年次の解析学の定番である。冪級数（power series）とその剰余項の理論については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。